Problemas de olimpiadas de matemáticas, Veracruz 2015

Melida Carranza Trejo
Víctor Pérez García
Brenda Tapia Santos
Porfirio Toledo Hernández

Universidad Veracruzana

Problemas de olimpiadas de matemáticas, Veracruz 2015

Universidad Veracruzana

Problemas de olimpiadas de matemáticas, Veracruz 2015

Melida Carranza Trejo
Víctor Pérez García
Brenda Tapia Santos
Porfirio Toledo Hernández

Autor:	Melida Carranza Trejo, Víctor Pérez García, Brenda Tapia Santos, Porfirio Toledo Hernández.
Título:	Problemas de olimpiadas de matemáticas, Veracruz 2015 / Melida Carranza Trejo, Víctor Pérez García, Brenda Tapia Santos, Porfirio Toledo Hernández.
Edición:	Primera edición.
Pie de imprenta:	Xalapa, Veracruz, México: Universidad Veracruzana, Dirección Editorial, 2017.
Descripción física:	150 páginas
Serie:	(Fuera de colección)
Notas:	Bibliografía: paginas 141-143.
ISBN:	9786075026220

DGBUV 2017

Dirección Editorial
Hidalgo 9, Centro, CP 91000
Xalapa, Veracruz, México
Apartado postal 97,
diredit@uv.mx
Tel/fax (228) 818 59 80; 818 13 88

ISBN: 978-607-502-622-0

DOI: 10.25009/uv.2965.1774

Índice general

Prólogo

Una de las grandes fortalezas de las matemáticas es el hecho de ser uno de los campos más fértiles para desarrollar la capacidad de razonamiento a través de la adquisición de diferentes habilidades del pensamiento lógico, como son: la argumentación de ideas, la búsqueda de pautas y patrones, la detección de analogías, y la capacidad de abstracción, reflexión, generalización, análisis y comparación, entre otras, lo que impacta de manera positiva en el desarrollo humano de los estudiantes.

Para fomentar, desarrollar y evaluar las habilidades del pensamiento antes mencionadas, se han creado concursos de matemáticas para jóvenes estudiantes, que tienen una larga tradición en varios países del mundo; por ejemplo en Francia los concursos generales se realizan desde el siglo XVIII y en Hungría las competencias Eótvos desde 1894.

En la actualidad, el concurso más importante que se lleva a cabo es la Olimpiada Internacional de Matemáticas, que se realizó por primera vez en 1959 en Rumania con la participación de Hungría, la entonces URSS, Bulgaria, Polonia, Checoslovaquia y la República Democrática Alemana. A partir de entonces este concurso se celebra anualmente. En los años recientes participaron alrededor de cien países de todos los continentes, teniendo como objetivo:

- Descubrir, estimular y desafiar a los jóvenes con talento matemático en todos los países.
- Fomentar las relaciones internacionales amistosas entre los matemáticos de todos los países.
- Crear una oportunidad para el intercambio de información sobre planes de estudio y prácticas escolares en todo el mundo.
- Promover las matemáticas en general.

Con respecto a nuestro país, en el año 1987 la Sociedad Matemática Mexicana organizó por primera vez la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), que además de compartir los objetivos de la Olimpiada Internacional tuvo como fines propios:

- Detectar alumnos que tuvieran habilidades en las matemáticas, para estimularlas y potenciarlas.

- Ayudar a los jóvenes a que fortalecieran su intelecto, imaginación y creatividad.
- Fomentar el estudio de las matemáticas.
- Establecer un ámbito de encuentro para docentes, en el que fuera posible intercambiar experiencias sobre la enseñanza de esta disciplina.
- Promover el mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas proporcionando a maestros y alumnos nuevos incentivos y perspectivas.
- Fomentar publicaciones formativas en el ámbito de las matemáticas destinadas a los alumnos de bachillerato.

Es importante resaltar que la OMM fomenta y estimula el estudio de las matemáticas como una disciplina del pensamiento que desarrolla la inteligencia del estudiante, mediante métodos de razonamiento estructurado, deductivo y creativo.

Desde el año 1987 se realiza anualmente la OMM en nuestro país y ha tenido como sede diversos estados de la república mexicana. El programa básico de la olimpiada se desarrolla en cuatro etapas:

1. *Concursos estatales.* Los estados organizan, de manera independiente, el concurso de olimpiada y seleccionan a sus representantes.
2. *Concurso nacional.* Cada uno de los estados asiste con seis representantes para participar en la etapa nacional.
3. *Entrenamiento y selección de las delegaciones que representan a México en olimpiadas internacionales.* Los dieciséis mejores concursantes son entrenados por el Comité Organizador Nacional de la olimpiada durante un periodo aproximado de seis meses, con la finalidad de seleccionar a los mejores que representarán al país en la etapa internacional, entre otros concursos.
4. *Participación en olimpiadas internacionales.*

Cabe destacar que el primer concurso nacional se efectuó en la ciudad de Xalapa durante la celebración del XX Congreso de la Sociedad Mexicana de Matemáticas, en el mes de noviembre de 1987.

En relación con el estado de Veracruz, la Facultad de Matemáticas de la Universidad Veracruzana ha sido, desde el inicio, la responsable de organizar la etapa estatal a través del Comité Estatal, en coordinación con los sistemas y subsistemas oficiales de la Secretaría de Educación del Estado de Veracruz: CECYTEV, COBAEV, CONALEP, DGB, DGB-Federal, DGCYTM, DGES, DGETA, DGETI, DGTEBA, ITESM-CCV, UNAM, etcétera.

La selección de la delegación que representa al estado de Veracruz en el concurso nacional consta de tres etapas:

1. Las eliminatorias de los sistemas y subsistemas al cual pertenezca la escuela de donde provenga el estudiante.

   Cada subsistema establece sus propios criterios de selección para conformar la delegación que lo representará en la fase estatal.

2. El concurso estatal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas-Veracruz.

   Este evento se lleva a cabo en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Veracruzana el primer sábado de junio. Una vez realizada esta fase se premia a los seis primeros, seis segundos y seis terceros lugares, quienes conformarán la preselección del estado de Veracruz.

3. La selección y entrenamiento de la Delegación Veracruz.

   A los estudiantes preseleccionados se les brinda una serie de entrenamientos, impartidos por profesores y alumnos de la Facultad de Matemáticas, con la finalidad de capacitarlos en los siguientes temas: teoría de números, álgebra, geometría y combinatoria, haciendo hincapié en la resolución de problemas tipo olimpiada.

   Los entrenamientos se calendarizan los viernes y sábados cada quince días, pudiéndose incluir estancias de hasta una semana en la ciudad de Xalapa; dichos entrenamientos se realizan en fechas previas al concurso nacional. Se evalúa el desempeño de cada uno de los estudiantes preseleccionados y se aplican exámenes selectivos para elegir a los seis alumnos que conformarán la delegación que representará al estado de Veracruz en la etapa nacional.

Basta simplemente con buscar en la Internet *Olimpiadas de Matemáticas* para darse cuenta de que existe una gran diversidad de material que sirve como apoyo para preparar y entrenar a jóvenes estudiantes que desean participar en concursos de la especialidad; en este rubro, el Comité Organizador Nacional ha hecho una gran labor publicando libros, folletos y, actualmente, editando de manera periódica la revista *Tzaloa*. Esta misma labor se observa en comités de otros países e incluso estatales.

Este libro se presenta en forma de problemario, en donde aparecen, en capítulos separados, las etapas realizadas durante el año 2014. Se ha procurado presentar, en orden creciente de dificultad, algunos de los problemas a los cuales se enfrentaron los estudiantes que conformaron la Delegación Veracruz 2014, desde las eliminatorias iniciales hasta la etapa nacional.

En el Capítulo 1 se enuncian los problemas de algunos exámenes aplicados en el estado de Veracruz, entre ellos: un examen de la Etapa Sector, uno de la Etapa Regional y el examen de la Etapa Estatal Intermodalidades de la 19a. Olimpiada Veracruzana de Matemáticas para Alumnos de Educación Secundaria (OVMAES); se incluyen también los problemas del Concurso Estatal de la 28a. OMM y, finalmente, los exámenes selectivos que se utilizaron para conformar la Delegación Veracruz. El Capítulo 2 consta de una lista de problemas que se utilizaron en los entrenamientos de la Delegación Veracruz en el año 2014. En el Capítulo 3 se presentan los problemas del Concurso

Nacional de la 28a. OMM, realizada en la ciudad de Toluca, Estado de México, en la que participaron delegaciones de todos los estados del país. Los capítulos del 4 al 6 constan de las soluciones a los problemas planteados en los capítulos del 1 al 3, respectivamente. Para finalizar, el Capítulo 7 trata de algunos conceptos básicos de geometría, teoría de números, combinatoria y álgebra, con la finalidad de que dichos elementos teóricos de referencia se encuentren al alcance, para entender el material del libro.

Queremos agradecer a todas las personas que estuvieron involucradas con el desarrollo de las actividades mencionadas, especialmente a los que estuvieron a cargo de los entrenamientos: Julio César Aguilar Cabrera, Porfirio Toledo Hernández, Víctor Pérez García, Raquiel Rufino López Martínez, Francisco Gabriel Hernández Zamora, Brenda Tapia Santos, Melida Carranza Trejo, Ashley Antonio Olmedo Ortiz, Ariel Chávez González, Kevin Enrique Villalobos Aguilar, Eunice Cano García, Gustavo Moreno Peñalosa, Vidal Alí González Cucurachi, José Alfredo Zavaleta Viveros, Pedro Romero Martínez y Andrés Cruz.

Comité Estatal de la OMM-Veracruz

Capítulo 1

Exámenes de concursos en Veracruz

1.1. 19a. OVMAES Etapa Sector

Este examen se utilizó en un concurso de la Etapa Sector, de la 19a. Olimpiada Veracruzana de Matemáticas para Alumnos de Educación Secundaria (OVMAES), el día 29 de abril de 2014.

Problema 1. Isabel invitó a 17 amigos a su fiesta de cumpleaños. Jugando asignó a cada invitado un número del 2 al 18, reservando el número 1 para ella. Cuando todos estaban bailando se dio cuenta de que la suma de los números de cada pareja era un cuadrado perfecto. ¿Cuál es el número del invitado con quien baila Isabel?

Problema 2. En un supermercado existen tres marcas de tomate en bote. Los botes de la marca azul cuestan $50\,\%$ más que los de la marca verde, sin embargo contienen $10\,\%$ menos de tomate que los de la marca roja. Los botes de la marca roja pesan $50\,\%$ más que los de la marca verde y cuestan $25\,\%$ más que los de la marca azul. ¿Qué marca es más barata y cuál más cara? ¿Cuál marca conviene comprar?

Problema 3. Si sigues construyendo el triángulo de números, ¿cuál es el último número de la fila 2014?

1

3 5

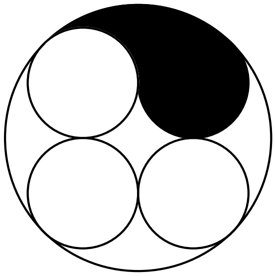
7 9 11

13 15 17 19

21 23 25 27 29

31 33 35 37 39 41

Problema 4. En la figura se muestran cuatro círculos de radio 1 dentro de uno más grande. ¿Cuál es el área de la figura sombreada?

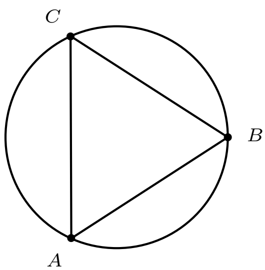


1.2. 19a. OVMAES Etapa Regional

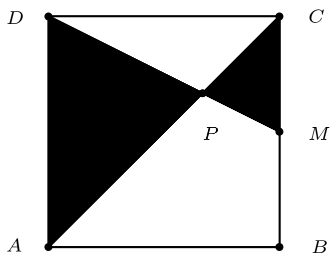
Este examen se utilizó en un concurso de la cuarta etapa: de Región, de la 19a. Olimpiada Veracruzana de Matemáticas para Alumnos de Educación Secundaria, el día 9 de mayo de 2014.

Problema 5. En el mundial de futbol participan 64 equipos divididos en 16 grupos; los equipos de cada grupo juegan un partido entre sí. Los mejores dos equipos de cada grupo clasifican a los dieciseisavos de final, donde juegan un partido de eliminación directa hasta que solo quedan 4 equipos en semifinal; los ganadores de los partidos de semifinal juegan el partido en la categoría final y los perdedores se disputan el tercer lugar. ¿Cuántos partidos se juegan en total?

Problema 6. ¿Cuál es el diámetro del siguiente círculo, si se sabe que $AC = 24\ cm$ y $BC = BA = 20\ cm$?



Problema 7. En un cuadrado $ABCD$ de lado igual a 1 se traza el segmento de recta AC y se une el vértice D con el punto medio M del lado BC. ¿Cuál es la razón entre las superficies del cuadrilátero $ABMP$ con respecto al triángulo $\triangle CDP$?



Problema 8. Si se escriben todos los múltiplos de 5 menores que 2014, ¿cuántos dígitos 1 se usan?

1.3. 19a. OVMAES Etapa Estatal Intermodalidades

Este examen se utilizó en la Etapa Estatal Intermodalidades, de la 19a. Olimpiada Veracruzana de Matemáticas para Alumnos de Educación Secundaria. El concurso se realizó el día 29 de mayo de 2014 en las instalaciones de la Escuela Secundaria y Bachilleres "Experimental", en la ciudad de Xalapa, Ver.

Problema 9. Considera un triángulo cualquiera $\triangle ABC$ y puntos D y E en los lados AB y BC, respectivamente, tales que DE es paralelo a AC. Si $BE = 5$, $EC = 2$ y el área de $\triangle DBE$ es igual a 10, encuentra la altura de $\triangle ABC$ correspondiente a la base BC.

Problema 10. Considera los vértices de dos hexágonos regulares colocados paralelos a una distancia dada, de tal manera que formen un prisma hexagonal. ¿Cuántos rectángulos podemos formar seleccionando cuatro de esos vértices?

Problema 11. Se construirá una sucesión de números de la siguiente manera: los primeros cuatros son 2, 0, 1 y 4. Observemos que la suma de ellos es 7. El quinto número se escoge de tal forma que la suma de él y los tres anteriores es 8; el sexto número se escoge de tal forma que la suma de él y los tres anteriores es 9, y, así, sucesivamente. Es decir, cada nuevo número incrementa en uno la suma de él y los tres anteriores. Determina cuál es el número que está en la posición 2014.

Problema 12. Carlos y Lorena van a jugar en un tablero en forma de cuadrícula de 5×5 cuadrados. Diremos que un cuadrado es "vecino" de otro si comparten uno de los lados (los cuadrados en posición diagonal no son vecinos). Los jugadores marcarán los cuadrados que elijan con la inicial de su nombre. El juego se lleva a cabo por turnos y tiene las siguientes reglas:

- El jugador en turno puede marcar uno o dos cuadrados vecinos entre sí y que no hayan sido marcados antes.
- No se pueden marcar cuadrados que sean vecinos de otro que tenga una marca del jugador contrario.

- Un jugador pierde cuando ya no puede seguir marcando cuadrados.

Si se sabe que Carlos será el primero en jugar, ¿cuál de los dos jugadores puede garantizar siempre la victoria? y ¿cuál es la estrategia que debe seguir dicho jugador?

1.4. 28a. OMM Estado de Veracruz

Estos problemas conformaron el examen del Concurso Estatal de Veracruz de la 28a. Olimpiada Mexicana de Matemáticas que se realizó el 7 de junio de 2014 en las instalaciones de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Veracruzana, en la ciudad de Xalapa, Ver.

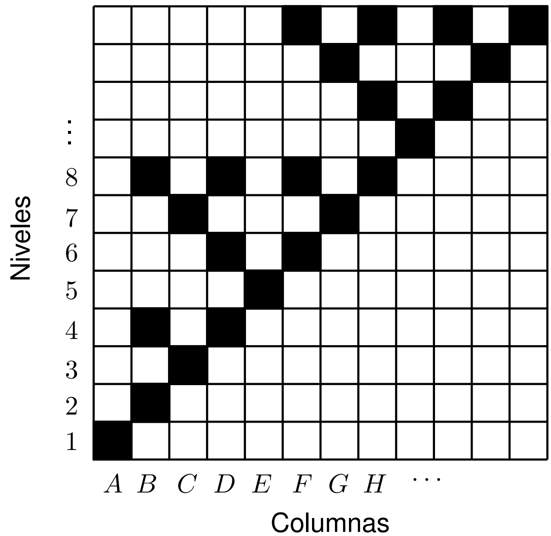
Problema 13. El lobo y Caperucita están realizando un juego con divisores de 2014. El lobo empieza con el número 1 y Caperucita con el número 2014. Por turnos, cada jugador cambia su número por otro divisor de 2014 mediante la operación de multiplicar o dividir por un número primo. El lobo ganará el juego si "alcanza" a Caperucita consiguiendo que sus números coincidan, pero Caperucita ganará si consigue hacer 100 cambios de número sin ser alcanzada. Si el lobo es quien inicia el juego y cada jugador sigue la estrategia que más le conviene, ¿quién gana?

Problema 14. Encuentra todos los números de tres dígitos $n = abc$ de tal forma que a, b y c son dígitos positivos distintos entre sí, abc es múltiplo de 2, bca es múltiplo de 3 y cab es múltiplo de 5.

Problema 15. Considera un rectángulo $ABCD$ donde los lados miden $AB = CD = 6$ y $BC = AD = 4$. Si E es el punto medio de AB y F es un punto entre D y E tal que $BF = 4$, encuentra el área del triángulo $\triangle CDF$.

Problema 16. En una cuadrícula de tamaño $2014^{2014} \times 2014^{2014}$ se pintaron de negro muchos cuadritos, iniciando con el de la esquina inferior izquierda, bajo las siguientes reglas: se pintan de negro todos los cuadritos del nivel, que compartan solo una esquina con solo un cuadrito negro del nivel inferior y que no toquen el borde izquierdo de la cuadrícula. En la figura se muestra la esquina inferior izquierda de la cuadrícula por donde se inició el proceso.

¿En qué nivel está el cuadrito negro número 2014 de la columna D?



1.5. 28a. OMM primer examen selectivo

El primer examen selectivo de la 28a. Olimpiada Mexicana de Matemáticas en el estado de Veracruz se realizó el 6 de septiembre de 2014 en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Veracruzana, en la ciudad de Xalapa, Ver. Este examen formó parte de la evaluación para seleccionar a los estudiantes que conformaron la delegación que representó al estado de Veracruz en el concurso nacional de la 28a. OMM.

Problema 17. Determina cuál número es mayor 2014^{2014} o bien 2015^{2013}.

Problema 18. Decimos que un número entero positivo n es *sieteable* si cumple alguna de las siguientes opciones:

1. El número n es divisible por 7.

2. Si el número no es divisible por 7 se le agrega al final el dígito que es el residuo de n al dividir entre 7 y vemos si es divisible por 7, si no entonces se repite la operación hasta llegar a un múltiplo de 7.

Determina cuáles de los siguientes números son *sieteable*s:

$$1, 2, \ldots, 2014.$$

Problema 19. Consideremos un heptágono regular $ABCDEFG$ y dos circunferencias de radios distintos $\mathcal{C}_1$ (que pasa por los puntos A y G) y $\mathcal{C}_2$ (que pasa por los puntos B y C). Si W y X son las intersecciones de EG y FG con $\mathcal{C}_1$, respectivamente, a la vez que Y y Z son las intersecciones de GC y FC con $\mathcal{C}_2$, respectivamente, demuestra que $AX \cdot BZ = AW \cdot BY$.

Problema 20. En un polígono regular de 2014 lados cada diagonal se pinta usando uno de n colores de manera que no hay dos diagonales del mismo color que se cruzan en el interior del polígono. ¿Cuál es el menor valor de n para el cual es posible hacer esto?

1.6. 28a. OMM segundo examen selectivo

El segundo examen selectivo de la 28a. Olimpiada Mexicana de Matemáticas en el estado de Veracruz se realizó los días 3 y 4 de octubre de 2014 en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Veracruzana, en la ciudad de Xalapa, Ver. Se utilizó, como parte de la última evaluación para seleccionar a los estudiantes que conformaron la delegación que representó al estado de Veracruz en el concurso nacional de la 28a. OMM.

1.6.1. Primer día

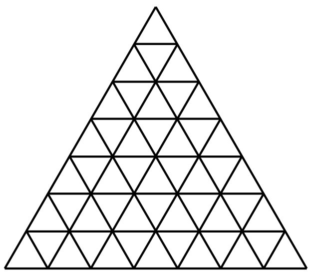
Problema 21. El entero positivo n y el primo p cumplen que p no divide a $(3n)!$ pero sí divide a

$$(3n+1)! + (3n+2)!.$$

Muestra que 3 divide a $p-1$.

Problema 22. Sean $\triangle ABC$ un triángulo acutángulo y D, E y F los respectivos pies de las alturas en A, B y C. Sean D', E' y F' puntos sobre los segmentos BC, CA y AB, respectivamente, tales que $BD = D'C$, $CE = E'A$ y $AF = F'B$. Prueba que las perpendiculares a BC en D', a CA en E' y a AB en F' son concurrentes.

Problema 23. Un triángulo equilátero de lado 7 se divide en triángulos equiláteros de lado 1 (como en la figura). Se pintan todos los vértices de los triángulos usando los colores rojo, verde y azul, de manera que cada triangulito de lado 1 tiene un vértice de cada color. Prueba que si se eligen segmentos (de lado 1) de modo que cada vértice pertenece a exactamente un segmento, entonces el número de segmentos elegidos que van de un vértice rojo a uno azul es el mismo que el número de segmentos que van de un vértice rojo a uno verde.



1.6.2. Segundo día

Problema 24. Prueba que si a, b, c y d son números reales positivos, entonces

$$4a^2 + 2b^4 + c^8 + d^8 \geq 8abcd.$$

Problema 25. Los vértices de un polígono regular de 160 lados están numerados en el sentido de las manecillas del reloj del 1 al 160. En un juego, Manuel debe escoger un vértice y ponerle una marca. Después seguirá marcando algunos vértices de acuerdo a la siguiente regla: cada vez que marque un vértice con número par girará en el sentido de las manecillas del reloj el mismo número de vértices que indique el vértice que acaba de marcar (por ejemplo, si escoge el vértice 42 marcará este, luego el 84, luego el 8, etc.). En caso de que en algún momento marque un vértice con un número impar, entonces hará lo mismo que con el par pero en el sentido contrario al de las manecillas del reloj. Irá marcando vértices hasta que llegue a un vértice ya marcado y ahí termina su juego. ¿Cuál es el máximo número de vértices que puede marcar?

Problema 26. Considera un cuadrilátero cíclico $ABCD$, tal que las cuerdas AD y BC son paralelas, $AD < BC$ y el centro O del circuncírculo de $ABCD$ queda en el exterior del cuadrilátero. Sean E la intersección de las rectas AB y CD, F el pie de la altura de $\triangle EBO$ en E y G la intersección de EF con BC. Demuestra que $AGOCE$ es cíclico.

Capítulo 2

Problemas de entrenamiento

Problema 1. (Problema 3 del Examen Estatal de la 2a. OMM Veracruz de 1988) Un faro emite tres colores distintos:

- Rojo cada 16 segundos.
- Verde cada 45 segundos.
- Blanco cada 2 minutos 20 segundos.

Los tres colores se emiten simultáneamente a media noche, es decir, a las cero horas. Indica los instantes del día en que:

1. Se emiten simultáneamente rojo y verde.
2. Se emiten simultáneamente rojo y blanco.
3. Se emiten simultáneamente verde y blanco.
4. Se emiten simultáneamente los tres colores.

Problema 2. (Problema 1 del Examen Estatal de la 4a. OMM Veracruz de 1990) Una clase tiene 25 pupitres arreglados en un cuadrado de 5×5. La maestra quiere cambiar el orden en que están sentados sus alumnos moviendo a cada estudiante a un pupitre adyacente (uno adelante, uno atrás, uno a la derecha o uno a la izquierda). Si es posible, explica cómo hacerlo. Si no es posible, da la razón por la que no se puede hacer.

Problema 3. (Problema 1 del Examen Estatal de la 2a. OMM Veracruz de 1988) Sean $\triangle ABC$ un triángulo cualquiera, en donde D y F son puntos sobre AB, tales que $AD = DB$ y $DF = FB$; además, E y G son puntos sobre AC, tales que $AE = EC$ y $EG = GC$. Encuentra la razón de las áreas de los trapecios $EDFG$ y $EDBC$.

Problema 4. (Problema A del Examen Estatal de la 23a. OMM Veracruz de 2009) Demuestra que la suma

$$299 + 2999 + 29999 + \cdots + 29999999999999$$

(donde el último número tiene 13 nueves) es divisible entre 12.

Problema 5. (Problema 2 del Examen Estatal de la 4a. OMM Veracruz de 1990) Sean $\triangle ABC$ un triángulo equilátero inscrito en un círculo, B' y C' los puntos medios de los lados CA y BA, respectivamente, y D una intersección de la recta $B'C'$ con el círculo. Demuestra que $\frac{B'C'}{C'D}$ es la razón áurea, esto es:

$$\frac{B'C'}{C'D} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Problema 6. Prueba las siguientes afirmaciones:

1. En un triángulo acutángulo, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

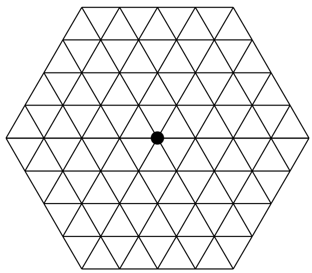
2. En un triángulo obtusángulo, el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos más el doble producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

Problema 7. (Problema 1 del Examen Estatal de la 6a. OMM Veracruz de 1992) Demuestra que de la igualdad

$$a^2 + b^2 + c^2 = bc + ac + ab,$$

en donde a, b y c son números reales, se deduce que $a = b = c$.

Problema 8. (Problema F del Examen Estatal de la 24a. OMM Veracruz de 2010) La figura representa una telaraña en la que cada segmento mide 1. La araña se encuentra en el centro y quiere llegar a la orilla caminando por los lados de los triángulos y usando solo 4 segmentos en total. ¿Cuántos caminos distintos puede seguir?



Problema 9. (Problema B del Examen Estatal de la 24a. OMM Veracruz de 2010) Un par ordenado de números de dos dígitos (ab, cd) se llama “centenario” si $(10a + b) + (c + d) = (10c + d) + (a + b) = 100$. ¿Cuántos pares “centenario” hay?

Problema 10. (Problema 3 del Examen Estatal de la 3a. OMM Veracruz de 1989) Demuestra que las expresiones

$$2x + 3y \quad \text{y} \quad 9x + 5y$$

son divisibles por 17 para el mismo conjunto de valores x y y.

Problema 11. (Problema 4 del Examen Estatal de la 3a. OMM Veracruz de 1989) Considera una descomposición de un tablero de ajedrez en p rectángulos que no se traslapan y que cumplan las siguientes condiciones:

1. Todo rectángulo tiene igual número de cuadrados blancos que de negros.
2. Todos los rectángulos tienen diferente número de cuadrados.

¿Cuál es la máxima p para la cual es posible esto?

Problema 12. (Problema 4 del Examen Estatal de la 5a. OMM Veracruz de 1991) Se ha elaborado un programa para que la computadora ordene alfabéticamente en una lista todas las posibles palabras (aunque no sean pronunciables, ni tengan significado) de siete letras que puedan formarse con las letras A, C, E, I, N, O, U, de tal manera que ninguna letra se repita en una misma palabra. Por ejemplo, la palabra $IANOECU$ debe incluirse en la lista, pero no así la palabra $ENACIOA$, ya que aunque consta de siete letras del grupo requerido, en ella se repite la letra A. Así, pues, la computadora escribirá en el lugar 1 de la lista la palabra $ACEINOU$, en el lugar 2 la palabra $ACEINUO$, en el 3 la palabra $ACEIONU$, en el 4 $ACEIOUN$, en el 5 $ACEIUNO$, en el 6 $ACEIUON$, en el 7 $ACENIOU$, etc. ¿Qué palabra escribirá en el lugar 1991?

Problema 13. (Problema C del Examen Estatal de la 12a. OMM Veracruz de 1998) Supongamos que queremos formar 5 pilas de cajas con las siguientes condiciones: cada pila debe tener entre una y cinco cajas, además, cada pila no puede tener más cajas que la pila de su izquierda. ¿De cuántas formas podemos hacer esto?

Problema 14. (Problema B del Examen Estatal de la 23a. OMM Veracruz de 2009) Un número capicúa es aquel que se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda (por ejemplo 77, 12421, etc...). Si escribimos de manera consecutiva todos los números capicúa

$$123456789112233\ldots\ ,$$

¿cuál es el dígito en la posición 2009?

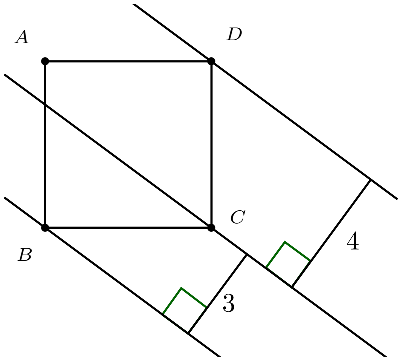
Problema 15. (Problema 2 del examen selectivo de la 19a. OMM Veracruz de 2005) Sean a, b y c enteros positivos tales que

$$\frac{a+b}{bc} = \frac{b+c}{ac} = \frac{a+c}{ab}.$$

Prueba que $a = b = c$.

Problema 16. (Problema 3 del Examen Estatal de la 1a. OMM Veracruz de 1987) Se tiene un tablero parecido al de ajedrez, pero de 15×15 en lugar de 8×8. Supongamos que los puntos que son esquinas de los cuadritos están coloreados de rojo, blanco o azul (tenemos entonces $16 \times 16 = 256$ puntos coloreados). Prueba que existe un rectángulo con dos lados verticales y dos horizontales, cuyos vértices son cuatro puntos del mismo color.

Problema 17. Por los vértices B, C y D de un cuadrado $ABCD$ se trazan rectas paralelas, como en la figura, de tal manera que la recta que pasa por C se encuentra a una distancia de 3 de la recta que pasa por B y de 4 de la que pasa por D. Determina el valor de AC.



Problema 18. (Problema 28 del Examen Canguro de 2006) ¿Cuánto vale $a-b$ si $a = 1^2+2^2+3^2+\cdots+2014^2$ y $b = (1\times3)+(2\times4)+(3\times5)+\cdots+(2012\times2014)$?

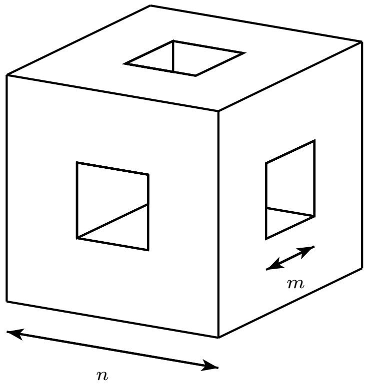
Problema 19. Sobre los catetos AC y BC del triángulo rectángulo $\triangle ABC$ se construyen exteriormente los cuadrados $AKLC$ y $BMNC$. Sean P y Q los pies de las perpendiculares a AB trazadas desde K y M, respectivamente. Prueba que $KP + MQ = AB$.

Problema 20. (Problema 5 del Quinto Examen Estatal de la 18a. OMM San Luis Potosí de 2004) Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ circunferencias exteriores de centros O_1 y O_2, respectivamente. Se trazan por O_1 las dos tangentes a la circunferencia $\mathcal{C}_2$, que intersecan a $\mathcal{C}_1$ en P y P', y se trazan por O_2 las dos tangentes a la circunferencia $\mathcal{C}_1$, que intersecan a $\mathcal{C}_2$ en Q y Q'. Demuestra que $PP' = QQ'$.

Problema 21. (Problema 1 del Examen Estatal de la 5a. OMM Veracruz de 1991) A un dado de madera de forma perfectamente cúbica y de n centímetros de arista se le practican tres orificios mutuamente perpendiculares que lo atraviesan completamente de lado a lado, siendo cada orificio de sección cuadrada, esto es, en forma de un prisma cuadrado con caras paralelas a las caras del cubo.

Los extremos de estos tres orificios o túneles que atraviesan el cubo son seis cuadrados iguales, cada uno sobre una de las distintas caras del cubo, con lados paralelos a las aristas del mismo y con el mismo centro con la cara correspondiente, como se muestra en la figura. Cada uno de estos seis cuadrados mide m centímetros de lado.

Encuentra el área y el volumen del sólido tridimensional que resulta.



Observación. Aquí el "área" no significa solo el área externa al cubo original, sino la superficie total de contacto entre el aire y la madera del dado perforado.

Problema 22. Sea $\triangle ABC$ un triángulo tal que $\measuredangle BAC = 70°$ y $\measuredangle BCA = 35°$. Si D es un punto en la bisectriz de $\measuredangle BAC$ tal que $BC = 2AD$, determina el valor de $\measuredangle DBC$.

Problema 23. (Problema A del Examen Estatal de la 15a. OMM Veracruz de 2001) Encuentra todos los números menores que 1000 que son iguales al triple de la suma de sus cifras.

Problema 24. (Problema 3 del Examen Final de la Categoría B, de las XXX Olimpiadas Portuguesas de Matemáticas de 2012) Helena y Luis jugarán un partido con dos bolsas de canicas. Ellos juegan alternadamente y cada jugada consiste de alguno en los siguientes movimientos:

- Retirar una canica de una de las bolsas.
- Retirar una canica de ambas bolsas.
- Mover una canica de una bolsa a otra.

Gana quien deja ambas bolsas vacías.

Antes de comenzar a jugar, Helena contó las canicas de cada bolsa y le dijo a Luis: "puedes comenzar tú", mientras piensa: "si él comienza seguro voy a ganar".

¿De qué manera podrían estar las canicas distribuidas en las bolsas para que lo que piensa Helena sea cierto?

Problema 25. (Problema D del Examen Estatal de la 14a. OMM Veracruz de 2000) Dados tres números enteros positivos se pueden realizar seis diferentes cocientes con ellos. Encuentra todas las ternas de números enteros positivos consecutivos, tales que la suma de los seis posibles cocientes sea un entero.

Problema 26. (Modificación del Problema 4 de la XXXVII Olimpiada Matemática Española Fase Nacional 2001) Los números enteros del 1 al 9 fueron distribuidos en las casillas de una tabla de 3×3. Después se sumaron seis números de tres dígitos: los tres que se leen en las tres filas de izquierda a derecha y los tres que se leen en las columnas de arriba a abajo. ¿Hay alguna distribución para la cual el valor de esta suma sea 2014?

Problema 27. (Problema 2 del Examen Final de la Categoría B de las XXX Olimpiadas Portuguesas de Matemáticas de 2012) Considera un triángulo $\triangle ABC$ y D un punto en el segmento BC, de tal forma que AD es la bisectriz de $\measuredangle BAC$ y $\triangle ACD$ es isósceles con $AD = DC$. ¿Cuál es el menor perímetro que puede tener $\triangle ABC$, considerando que las longitudes de los lados de los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ACD$ son números enteros?

Problema 28. (Problema 4 de la Segunda Fase Nivel 3-A de la Olimpiada Brasileña de Matemáticas de 2012) Los dos menores números primos de la forma n^2+5 son $6^2+5=41$ y $12^2+5=149$. ¿Cuál es el tercer menor número primo de esa forma?

Problema 29. (Problema 3 de la Segunda Fase Nivel 3-B de la Olimpiada Brasileña de Matemáticas de 2012) Sean $ABCD$ un cuadrado, E el punto medio del lado BC y F el punto medio del lado CD. Se construyen los triángulos equiláteros $\triangle ABG$ y $\triangle BEH$ de forma que G esté en el interior del cuadrado y H en el exterior. Determina el ángulo agudo entre las rectas BF y GH.

Problema 30. Supongamos que tres circunferencias se intersecan en dos puntos A y B. Una recta que pasa por A corta a las circunferencias en los puntos D, E y F. Sean ℓ_D, ℓ_E y ℓ_F las rectas tangentes en los puntos D, E y F, respectivamente. Si ℓ_D y ℓ_E se cortan en P, ℓ_E y ℓ_F se cortan en Q, ℓ_F y ℓ_D se cortan en R, demuestra que $PBQR$ es un cuadrilátero cíclico.

Problema 31. (Problema C del examen selectivo de la 20a. OMM Veracruz de 2006) Considera los coeficientes binomiales

$$\binom{n}{k},$$

con $n \leq 30$. ¿Cuántos de ellos son impares?

Problema 32. (Problema 6 del Examen Nacional de la 11a. OMM de 1997) Prueba que el número 1 se puede escribir de una infinidad de maneras distintas en la forma

$$1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n},$$

donde n y a_1, a_2, ..., a_n son enteros positivos y $5 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.

Problema 33. Demuestra que $2+4+\cdots+2010$ es divisor de

$$2^{2011} + 4^{2011} + \cdots + 2010^{2011}.$$

Problema 34. La suma de cuadrículas del mismo tamaño, con números escritos en sus casillas, se efectúa casilla por casilla, por ejemplo:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 0 \\ \hline 3 & 0 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline 4 & 2 \\ \hline 6 & 5 \\ \hline\end{array}$$

Dado un entero positivo n, diremos que una cuadrícula es n-balanceada si tiene números enteros escritos en sus casillas y si la diferencia entre los números, escritos en cualesquiera dos casillas que comparten un lado, es menor o igual que n.

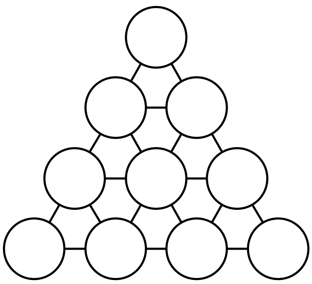
1. Muestra que toda cuadrícula $2n$-balanceada (de cualquier tamaño) se puede escribir como suma de 2 cuadrículas n-balanceadas.

2. Muestra que toda cuadrícula $3n$-balanceada (de cualquier tamaño) se puede escribir como suma de 3 cuadrículas n-balanceadas.

Problema 35. En un triángulo $\triangle ABC$ se tiene que $\measuredangle ABC = \measuredangle ACB = 80°$. Sea P un punto en el segmento AB tal que $\measuredangle BPC = 30°$. Demuestra que $AP = BC$.

Problema 36. (Problema 3 de 35a. Olimpiada Matemática Española Fase Nacional 1999) Sobre un tablero en forma de triángulo equilátero, como el que se indica en la figura, se juega un solitario. Sobre cada casilla se coloca una ficha. Cada una es blanca por un lado y negra por el otro. Inicialmente, solo una ficha, que está situada en un vértice, tiene la cara negra hacia arriba; el resto tiene la cara blanca hacia arriba. En cada movimiento se retira solo una ficha negra del tablero y se da la vuelta a cada una de las demás que ocupan una casilla vecina (casillas vecinas son las que están unidas por un segmento).

Determina si después de varios movimientos es posible quitar todas las fichas del tablero.



Problema 37. (Problema del Concurso Nacional de la Olimpiada de Matemáticas de Colombia de 1997) Considera una cuadrícula de m por n y tres colores distintos. Se desea colorear cada segmento de la cuadrícula con alguno de los tres colores de modo que cada cuadro de 1×1 tiene dos lados de un color y dos lados de un segundo color. ¿De cuántas maneras es esto posible?

Problema 38. Considera el conjunto de números $\{1, 2, 3, \ldots, 99, 100\}$.

1. Si se escogen 51 de ellos, muestra que hay dos que no tienen ningún divisor primo común.

2. Si se escogen 51 de ellos, muestra que hay dos, tales que uno divide al otro.

Problema 39. En el triángulo $\triangle ABC$, la bisectriz interior del ángulo $\measuredangle A$ y la mediana trazada a partir de A cortan a BC en dos puntos distintos D y E, respectivamente. Sea M el punto de intersección de AE y la perpendicular a AD trazada a partir de B. Prueba que AB y DM son paralelas.

Problema 40. (Problema de la Competencia Matemática Austriaco-Polaca de 1996) Se nos ha dado una colección de ladrillos rectangulares, ninguno de los cuales es un cubo. Las longitudes de los bordes son números enteros. Para cada terna de enteros positivos (a, b, c) hay un suministro suficiente de ladrillos $a \times b \times c$. Supongamos que los ladrillos llenan completamente una caja de $10 \times 10 \times 10$.

1. Supongamos que se han utilizado al menos 100 ladrillos. Demuestra que existen al menos dos ladrillos paralelos, esto es, si AB es un borde de uno de los ladrillos, $A'B'$ es un borde de otro y AB es paralelo a $A'B'$, entonces $AB = A'B'$.

2. Demuestra la misma afirmación con 100 reemplazado por un número menor.

Problema 41. Sea $\triangle ABC$ un triángulo acutángulo. Las bisectrices de $\measuredangle ABC$ y $\measuredangle ACB$ cortan a una circunferencia S que pasa por B y C en los puntos M y N, respectivamente. La recta MN corta a AB en P y a AC en Q. Demuestra que la circunferencia inscrita a $\triangle ABC$ es tangente a AB en P y a AC en Q si y solo si BC es diámetro.

Problema 42. Demuestra que existe un entero positivo n tal que

$$\left(\sqrt{2013} - \sqrt{2012}\right)^{2014} = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

Problema 43. Sea $\triangle ABC$ un triángulo cuyo lado más pequeño es BC. Sean P un punto de AB tal que $\measuredangle PCB = \measuredangle BAC$ y Q un punto sobre AC tal que $\measuredangle QBC = \measuredangle BAC$. Demuestra que la recta que pasa a través de los centros de los circuncírculos de $\triangle ABC$ y $\triangle APQ$ es perpendicular a BC.

Problema 44. (Problema 3 del Concurso Nacional de la Olimpiada de Matemáticas de Canadá de 1997) Demuestra que

$$\frac{1}{1999} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{1997}{1998} < \frac{1}{44}.$$

Problema 45.

1. Sea $X \neq A$ el punto de intersección de la bisectriz de $\measuredangle BAC$ con el circuncírculo de $\triangle ABC$. Considera I un punto en AX. Demuestra que I es el incentro de $\triangle ABC$ si y solo si $XI = XB = XC$.

2. (Problema 3 de la Olimpiada Australiana de Matemáticas de 1982) Sea I el incentro de $\triangle ABC$. Si AI, BI y CI se intersecan con el circuncírculo de $\triangle ABC$ en los puntos P, Q y R, respectivamente, demuestra que

$$AP + BQ + CR > AB + BC + CA.$$

Problema 46. Demuestra que para cada entero $n \geq 0$, el número 7^{7^n} es el producto de al menos $2n+3$ números primos no necesariamente distintos.

Problema 47. (Problema 1 de la XI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas de 1996) Sea n un número natural. Un cubo de longitud lateral n puede ser dividido en 1996 cubos, cuyas longitudes laterales tambien son números naturales. Determina el menor valor posible para n.

Problema 48. (Problema 8.1 del Torneo de Matemáticas de Primavera de Bulgaria de 1997) Encuentra todos los valores reales de m que hacen que la ecuación

$$[x^2 - 2mx - 4(m^2+1)]\,[x^2 - 4x - 2m(m^2+1)] = 0$$

tenga exactamente tres raíces diferentes.

Problema 49. Una cuadrícula rectangular es coloreada como un tablero de ajedrez donde cada casilla contiene un número entero. Se sabe que la suma de los números en cada fila y la suma de los números en cada columna es par. Demuestra que la suma de todos los números en las casillas negras es par.

Problema 50. Sea $\triangle ABC$ un triángulo acutángulo y sea T un punto en su interior tal que $\measuredangle ATB = \measuredangle BTC = \measuredangle CTA$. Sean M, N y P las proyecciones de T sobre BC, AC y AB, respectivamente. El circuncírculo de $\triangle MNP$ interseca a BC, AC y AB por segunda vez en los puntos M', N' y P', respectivamente. Demuestra que $\triangle M'N'P'$ es equilátero.

Problema 51. Encuentra todas las ternas ordenadas (x, y, z) que satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 17, \\ xy + yz + xz &= 94, \\ xyz &= 168. \end{aligned}$$

Problema 52. Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ circunferencias concéntricas, con $\mathcal{C}_2$ en el interior de $\mathcal{C}_1$. Desde un punto A sobre $\mathcal{C}_1$ se traza una tangente AB a $\mathcal{C}_2$ (con B en $\mathcal{C}_2$). Sean C el segundo punto de intersección de AB con $\mathcal{C}_1$ y D el punto medio de AB. Una línea que pasa por A interseca a $\mathcal{C}_2$ en E y F, de tal manera que las mediatrices de DE y CF se cortan en un punto M, en la recta AB. Encuentra el valor de la razón $\frac{AM}{MC}$.

Capítulo 3

28a. OMM Concurso Nacional

El Concurso Nacional de la 28a. Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizó en la ciudad de Toluca, Estado de México, del 9 al 14 de noviembre de 2014. La Delegación del Estado de Veracruz estuvo conformada por:

- Mariola Camacho Lie (medalla de bronce), de la Escuela Secundaria Técnica Liceo Dr. John J. Sparks (DGES), de Coatzacoalcos, Ver.
- María de Jesús García Santiago, de la Escuela Profr. Germán Mercado Cardoza (COBAEV), de Nanchital, Ver.
- Aldo Mateos Cruz (medalla de bronce), de la Escuela Profr. Octaviano Corro Ramos (COBAEV), de Minatitlán, Ver.
- Jesús Enrique Lindbergh Aguilar Hernández (medalla de plata), de la Escuela Profr. Octaviano Corro Ramos (COBAEV), de Minatitlán, Ver.
- Emmanuel Antonio Cuevas (mención honorífica), del Bachillerato Tecnológico John J. Sparks (DGETI), de Coatzacoalcos, Ver.
- José Manuel Monterrosas Romero (medalla de bronce), del Colegio Buckingham (UNAM), de Coatzacoalcos, Ver.

Mariola Camacho quedó preseleccionada para la IMC (International Mathematics Competition) para alumnos de secundaria, que se celebró del 23 al 28 de julio de 2015 en Changchun, China. Además, la Delegación Veracruz obtuvo el tercer lugar en la Copa Superación.

3.1. Primer día

Problema 1. Cada uno de los números de 1 al 4027 se ha coloreado de verde o de rojo. Cambiar el color de un número es pasarlo a verde si era rojo, y pasarlo a rojo si era verde. Diremos que dos enteros positivos m y n son cuates si alguno de los números $\frac{m}{n}$ o $\frac{n}{m}$ es primo. Un *paso* consiste en elegir dos números que sean cuates y cambiar el color de cada uno de los números.

Muestra que después de realizar algunos de los pasos es posible hacer que todos los números de 1 al 2014 sean verdes.

Problema 2. Un entero positivo a se reduce a un entero positivo b si al dividir a entre sus dígitos de las unidades se obtiene b. Por ejemplo, 2015 se reduce a $\frac{2015}{5} = 403$. Encuentra todos los enteros positivos que, mediante algunas reducciones, llegan al número 1. Por ejemplo, el número 12 es uno de tales enteros, pues 12 se reduce a 6 y 6 se reduce a 1.

Problema 3. Sean Γ_1 una circunferencia y P un punto fuera de Γ_1. Las tangentes desde P a Γ_1 tocan a la circunferencia en los puntos A y B. Considera M el punto medio del segmento PA y Γ_2 la circunferencia que pasa por los puntos P, A y B. La recta BM interseca de nuevo a Γ_2 en el punto C, la recta CA interseca de nuevo a Γ_1 en el punto D, el segmento DB interseca de nuevo a Γ_2 en el punto E y la recta PE interseca a Γ_1 en el punto F (con E entre P y F).

Muestra que las rectas AF, BP y CE concurren.

3.2. Segundo día

Problema 4. Sea $ABCD$ un rectángulo con diagonales AC y BD. Sean E el punto de intersección de la bisectriz del ángulo $\measuredangle CAD$ con el segmento CD, F el punto sobre el segmento CD tal que E es punto medio de DF y G el punto sobre la recta BC tal que $BG = AC$ (con C entre B y G). Muestra que la circunferencia que pasa por D, F y G es tangente a BG.

Problema 5. Sean a, b y c números reales positivos tales que $a + b + c = 3$. Muestra que

$$\frac{a^2}{a + \sqrt[3]{bc}} + \frac{b^2}{b + \sqrt[3]{ca}} + \frac{c^2}{c + \sqrt[3]{ab}} \geq \frac{3}{2},$$

y determina cuándo se da la igualdad.

Problema 6. Para cada entero positivo n, sea $d(n)$ la cantidad de divisores positivos de n. Por ejemplo, los divisores de 6 son 1, 2, 3 y 6, por lo que $d(6) = 4$. Encuentra todos los enteros positivos n tales que

$$n + d(n) = d(n)^2.$$

Capítulo 4

Soluciones de los exámenes de concursos en Veracruz

4.1. 19a. OVMAES Etapa Sector

Problema 1. Isabel invitó a 17 amigos a su fiesta de cumpleaños. Jugando asignó a cada invitado un número del 2 al 18, reservando el número 1 para ella. Cuando todos estaban bailando se dio cuenta de que la suma de los números de cada pareja era un cuadrado perfecto. ¿Cuál es el número del invitado con quien baila Isabel?

Solución
Primero, es necesario considerar que en la serie comprendida del número 1 al 18 los cuadrados perfectos al sumar 2 números son $4, 9, 16$ y 25. Descartemos las parejas con invitados número $16, 17$ y 18, pues solo pueden sumar 25 bailando con los invitados número $9, 8$ y 7, respectivamente.

Como el invitado número 7 ya tiene pareja, el invitado número 2 solo puede estar bailando con el invitado número 14. De igual manera, el invitado número 11 solo puede estar bailando con el número 5, puesto que el número 14 ya tiene pareja. Luego, al ya tener pareja el invitado número 5, el invitado número 4 solo puede estar bailando con el número 12, y como el invitado número 12 también tiene pareja, el invitado número 13 solo puede estar bailando con el número 3.

Finalmente quedan Isabel (número 1) y los invitados con número $6, 10$ y 15. Isabel tiene que bailar con el invitado número 15, puesto que con alguien distinto sumaría 7 y 11.

Problema 2. En un supermercado existen tres marcas de tomate en bote. Los botes de la marca azul cuestan $50\,\%$ más que los de la marca verde, sin embargo contienen $10\,\%$ menos de tomate que los de la marca roja. Los botes de la marca roja pesan $50\,\%$ más que los de la marca verde y cuestan $25\,\%$ más que los de la marca azul. ¿Qué marca es más barata y cuál más cara? ¿Cuál marca conviene comprar?

Solución
Sean A_p, V_p y R_p los precios de los botes de las marcas azul, verde y roja, respectivamente, y A_c, V_c y R_c el contenido de los botes de las marcas azul, verde y roja, respectivamente. Sabemos que

$$A_p = 1.5V_p,$$

puesto que los botes de la marca azul cuestan un $50\,\%$ más que los de la marca verde, y

$$R_p = 1.25A_p,$$

puesto que los botes de la marca roja cuestan un $25\,\%$ más que los de la marca azul. Luego,

$$R_p = 1.875V_p.$$

Así, podemos decir que la marca más barata es la verde.

Ahora consideraremos cuál marca conviene comprar de acuerdo a su precio y contenido. Sabemos que $A_c = 0.9R_c$, puesto que los botes de la marca azul contienen un $10\,\%$ más que los de la marca roja, y que $R_c = 1.5V_c$, puesto que los botes de la marca roja pesan $50\,\%$ más que los de la marca verde. Luego, $A_c = 1.35V_c$.

A continuación, necesitamos calcular la relación que existe entre el contenido y el costo de cada bote para cada marca. De la marca azul tenemos

$$\frac{A_c}{A_p} = \frac{1.35V_c}{1.5V_p} = 0.9\frac{V_c}{V_p}.$$

Es decir, por unidad de costo de la marca azul obtenemos 0.9 unidades de contenido de la marca verde. De la marca roja tenemos

$$\frac{R_c}{R_p} = \frac{1.5V_c}{1.875V_p} = 0.8\frac{V_c}{V_p}.$$

Es decir, por unidad de costo de la marca roja obtenemos 0.8 unidades de contenido de la marca verde.

Dado que de la marca verde tenemos $\frac{V_c}{V_p} = \frac{V_c}{V_p}$, entonces por cada unidad de costo de la marca verde obtenemos una unidad de contenido de la marca verde.

De esta manera concluimos que la marca verde es la que más conviene comprar.

Problema 3. Si sigues construyendo el triángulo de números, ¿cuál es el último número de la fila 2014?

1					
3	5				
7	9	11			
13	15	17	19		
21	23	25	27	29	
31	33	35	37	39	41

Solución 1

Como nos interesa encontrar el último número de la fila 2014, entonces basta analizar los números de la última fila del triángulo. Observemos que $1 = 1 + 2(0)$, $5 = 1 + 2(2)$, $11 = 1 + 2(2 + 3)$, $19 = 1 + 2(2 + 3 + 4)$, etcétera.

Así, el número buscado es

$$1 + 2(2 + 3 + 4 + \cdots + 2014) = 1 + 2\left(\frac{(2014)(2015)}{2} - 1\right) = 4058209.$$

Solución 2

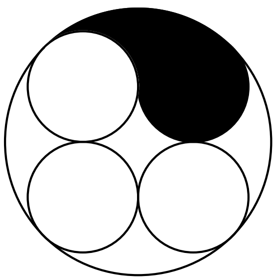
Observemos que la primera fila de la pirámide tiene un solo número, la segunda fila tiene dos, la tercera tiene tres y así, sucesivamente. Entonces, la fila número 2014 tendrá 2014 números. Luego, la cantidad de números que tenga la pirámide total (hasta la fila 2014) será

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 2014 = \frac{(2014)(2015)}{2} = 2029105.$$

Notemos también que la pirámide está compuesta por los primeros números impares, es decir, números de la forma $2n - 1$ donde n es la posición que toman en la pirámide contando de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo. Así, el número que estamos buscando está en la posición 2029105 y, por lo tanto, es

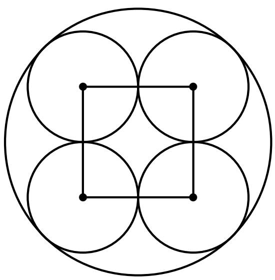
$$2(2029105) - 1 = 4058209.$$

Problema 4. En la figura se muestran cuatro círculos de radio 1 dentro de uno más grande. ¿Cuál es el área de la figura sombreada?



Solución

Como los radios de los círculos internos forman un cuadrado, la medida de cada lado es 2 y su diagonal permite calcular el diámetro del círculo grande.



De esta manera, el diámetro del círculo grande está dado por

$$\sqrt{2^2+2^2}+1+1=2\sqrt{2}+2.$$

Por lo tanto, su radio es $\sqrt{2}+1$. Así, el área del círculo grande es $(\sqrt{2}+1)^2\pi$.

Al restar al área del círculo grande el área del cuadrado y el área de tres círculos internos, se obtiene el área de las cuatro partes que se forman en los arcos la cual es $(\sqrt{2}+1)^2\pi-3\pi-4$.

El área sombreada es el área del círculo pequeño más la cuarta parte del área obtenida anteriormente,

$$\pi+\frac{(\sqrt{2}+1)^2\pi-3\pi-4}{4}.$$

Por lo tanto, el área de la figura sombreada es $\frac{(\sqrt{2}+1)^2+1}{4}\pi-1$.

4.2. 19a. OVMAES Etapa Regional

Problema 5. En el mundial de futbol participan 64 equipos divididos en 16 grupos; los equipos de cada grupo juegan un partido entre sí. Los mejores dos equipos de cada grupo clasifican a los dieciseisavos de final, donde juegan un partido de eliminación directa hasta que solo quedan 4 equipos en semifinal; los ganadores de los partidos de semifinal juegan el partido en la categoría final y los perdedores se disputan el tercer lugar. ¿Cuántos partidos se juegan en total?

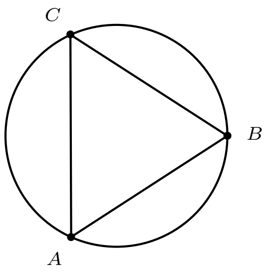
Solución

Como de un total de 64 equipos se forman 16 grupos, entonces cada grupo tiene 4 equipos. En cada grupo todos juegan entre sí una sola vez, por lo que hay $\binom{4}{2}=6$ partidos en cada grupo. Luego, hay $(16)(6)=96$ partidos iniciales.

Al clasificar dos equipos de cada grupo, quedan $2(16)=32$ equipos. En dieciseisavos de final hay $\frac{32}{2}=16$ partidos y como es eliminación directa quedan 16 equipos. En los octavos de final hay $\frac{16}{2}=8$ partidos y quedan 8 equipos. En los cuartos de final hay $\frac{8}{2}=4$ partidos y quedan 4 equipos. En la semifinal hay $\frac{4}{2}=2$ partidos y quedan dos equipos. A todos estos partidos hay que sumarles dos más por la final y el partido por el tercer lugar. Finalmente, la cantidad de partidos jugados es

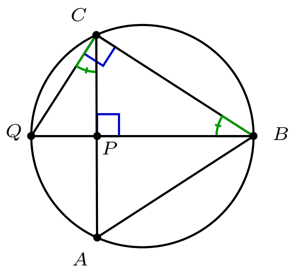
$$96+16+8+4+2+2=128.$$

Problema 6. ¿Cuál es el diámetro del siguiente círculo, si se sabe que $AC=24\ cm$ y $BC=BA=20\ cm$?



Solución

Sea P la intersección de la bisectriz de $\measuredangle CBA$ con AC. Como $\triangle ABC$ es isósceles con $AB = BC$, entonces BP también es mediatriz de AC, por lo que el circuncentro de $\triangle ABC$ está sobre BP y $\measuredangle CPB = \measuredangle APB = 90°$. Por el Teorema de Pitágoras aplicado a $\triangle CBP$ tenemos que $PB = 16$.



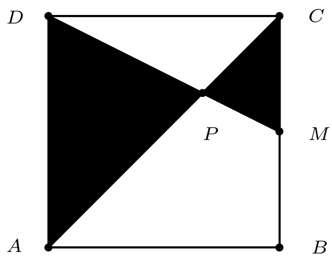
Sea Q la intersección de BP con el circuncírculo de $\triangle ABC$. Entonces BQ es diámetro, por lo que $\measuredangle QCB = 90°$. Así, por el criterio AA, $\triangle CQB \sim \triangle PCB$ y $\triangle PQC \sim \triangle CQB$, de donde, por transitividad, $\triangle PCB \sim \triangle PQC$. Luego

$$\frac{PQ}{PC} = \frac{PC}{PB},$$

por lo que $PQ = 9$. Finalmente tenemos

$$BQ = BP + PQ = 16 + 9 = 25.$$

Problema 7. En un cuadrado $ABCD$ de lado igual a 1 se traza el segmento de recta AC y se une el vértice D con el punto medio M del lado BC. ¿Cuál es la razón entre las superficies del cuadrilátero $ABMP$ con respecto al triángulo $\triangle CDP$?



Solución
Por ser opuestos por el vértice $\measuredangle DPA = \measuredangle CPM$. Por ser alternos internos $\measuredangle DAP = \measuredangle MCP$. Por criterio AA tenemos que $\triangle DPA \sim \triangle MPC$, de donde

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PM} = \frac{AD}{CM} = 2.$$

Sean h y s las alturas de $\triangle MPC$ y $\triangle DPA$, trazadas desde P, respectivamente. De esta manera $s = 2h$. Además

$$3h = 2h + h = s + h = 1$$

por lo que $h = \frac{1}{3}$. Finalmente,

$$\frac{(APMB)}{(\triangle CPD)} = \frac{(\triangle ACB) - (\triangle PMC)}{(\triangle CDA) - (\triangle DAP)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{12}}{\frac{1}{2} - \frac{2}{6}} = \frac{\frac{5}{12}}{\frac{1}{6}} = \frac{5}{2}.$$

Problema 8. Si se escriben todos los múltiplos de 5 menores que 2014, ¿cuántos dígitos 1 se usan?

Solución
Al considerar los múltiplos de 5 menores que 1000, los que tienen dos dígitos 1 solo son 110 y 115. Los que tienen un solo dígito 1 pueden tenerlo en las centenas o en la decenas. En ambos casos, el total de números con estas características es $1 \times 9 \times 2 = 18$, ya que en el dígito de las unidades debe ir 0, o bien 5, dejándonos dos lugares libres para el dígito 1, y en el lugar restante puede ir cualquier otro dígito distinto de 1. Por lo que, hasta el número 1000, se han ultilizado $2 \times 18 + 2 \times 2 = 40$ dígitos 1.

Ahora, del 1000 al 2000 solo hay dos múltiplos que tienen tres dígitos 1: el 1110 y el 1115. En cuanto a los que tienen dos dígitos 1, uno debe ir en las unidades de millar, el otro puede estar en las centenas o decenas, las unidades deben ser 0 o 5 y la cifra restante puede ser cualquier otro dígito distinto de 1; por lo que hay $2 \times 9 \times 2 = 36$ dígitos 1. Finalmente, los que tienen un solo dígito 1 lo deben tener en las unidades de millar. En este caso, tenemos $9 \times 9 \times 2 = 162$ números. Así, del 1000 al 2000 utilizamos $3 \times 2 + 2 \times 36 + 162 = 240$ dígitos 1.

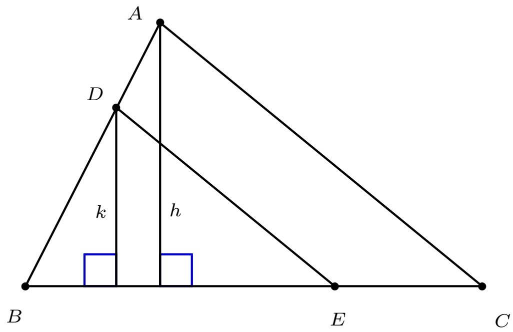
Del 2000 al 2014 el único múltiplo de 5 que tiene dígitos 1 es 2010.

Por lo tanto, en total se usan $40 + 240 + 1 = 281$ dígitos 1.

4.3. 19a. OVMAES Etapa Estatal Intermodalidades

Problema 9. Considera un triángulo cualquiera $\triangle ABC$ y puntos D y E en los lados AB y BC, respectivamente, tales que DE es paralelo a AC. Si $BE = 5$, $EC = 2$ y el área de $\triangle DBE$ es igual a 10, encuentra la altura de $\triangle ABC$ correspondiente a la base BC.

Solución
Sean h y k las alturas de los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DBE$ trazadas desde los vértices A y D, respectivamente.



Como DE y AC son paralelos, por el criterio AA tenemos que $\triangle ABC$ y $\triangle DBE$ son semejantes, por lo que se cumple $\frac{h}{k} = \frac{BC}{BE}$, es decir:

$$h = \frac{BC \cdot k}{BE} = \frac{(BE + EC)k}{5} = \frac{7k}{5}.$$

Sabemos que el área de $\triangle DBE$ es igual a 10, es decir:

$$10 = \frac{BE \cdot k}{2} = \frac{5k}{2},$$

de donde $k = 4$ y, así, sustituyendo en la primera expresión para h, obtenemos que

$$h = \frac{28}{5}.$$

Problema 10. Considera los vértices de dos hexágonos regulares colocados paralelos a una distancia dada, de tal manera que formen un prisma hexagonal. ¿Cuántos rectángulos podemos formar seleccionando cuatro de esos vértices?

Solución
Básicamente podemos distinguir dos tipos de rectángulos. Por un lado, los que tienen sus cuatro vértices en la misma base hexagonal del prisma, de los cuales podemos encontrar 3 rectángulos en cada base, es decir, 6 rectángulos en total. Por otro lado, distinguimos los que tienen solo dos vértices en una de las bases hexagonales, estos a su vez se dividen en los siguientes grupos:

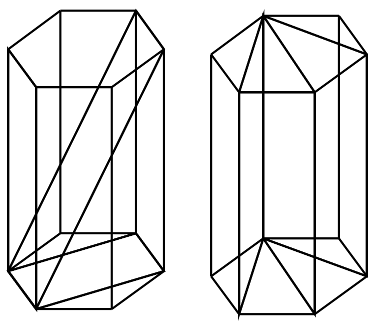
- Si los vértices son consecutivos, entonces podemos encontrar 6 rectángulos verticales (cada una de las caras del prisma) y 6 rectángulos inclinados (los que forman dos vértices en una cara y sus opuestos en la otra), es decir, 12 rectángulos en total.
- Si los vértices están separados por un vértice, entonces por cada par de vértices tenemos 1 rectángulo vertical (el que forman dos vértices en

una cara con sus respectivos vértices en la otra) y 1 rectángulo inclinado (el que forman dos vértices en una cara con sus vértices opuestos en la otra); es decir, 2 rectángulos por cada pareja de vértices alternados. Como se tienen 6 parejas de vértices separados de esta manera, tenemos en total 12 rectángulos en este caso.

- Si los vértices están separados por dos vértices, entonces uno de los lados del rectángulo corresponde con una de las diagonales de una cara. Así, solo pueden formarse 3 rectángulos y son los que se configuran con los vértices correspondientes en la cara opuesta.

Finalmente, el total de rectángulos que pueden formarse es

$$6 + 12 + 12 + 3 = 33.$$



Problema 11. Se construirá una sucesión de números de la siguiente manera: los primeros cuatros son 2, 0, 1 y 4. Observemos que la suma de ellos es 7. El quinto número se escoge de tal forma que la suma de él y los tres anteriores es 8; el sexto número se escoge de tal forma que la suma de él y los tres anteriores es 9, y, así, sucesivamente. Es decir, cada nuevo número incrementa en uno la suma de él y los tres anteriores. Determina cuál es el número que está en la posición 2014.

Solución

Observamos que el quinto número de la sucesión equivale a sumar uno al número que se encuentra en la primera posición, el sexto número equivale a sumar uno al número que se encuentra en la segunda posición y, así, sucesivamente; entonces, el noveno número de la sucesión será una unidad mayor que el que está en la quinta posición y, en consecuencia, dos unidades mayor que el que está en la primera. De esta manera podemos agrupar la sucesión en bloques de 4 de la siguiente forma:

$$\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 6 \\ 5 & 3 & 4 & 7 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Ahora, como $2014 = (4)(504) + 2$, entonces el número que está en la posición 2014 deberá estar en la fila 504 del arreglo anterior y en la segunda columna, es decir, en la columna cuyo número inicial es 0. Así el número que se encuentra en la posición 2014 es 503.

Problema 12. Carlos y Lorena van a jugar en un tablero en forma de cuadrícula de 5×5 cuadrados. Diremos que un cuadrado es "vecino" de otro si comparten uno de los lados (los cuadrados en posición diagonal no son vecinos). Los jugadores marcarán los cuadrados que elijan con la inicial de su nombre. El juego se lleva a cabo por turnos y tiene las siguientes reglas:

- El jugador en turno puede marcar uno o dos cuadrados vecinos entre sí y que no hayan sido marcados antes.
- No se pueden marcar cuadrados que sean vecinos de otro que tenga una marca del jugador contrario.
- Un jugador pierde cuando ya no puede seguir marcando cuadrados.

Si se sabe que Carlos será el primero en jugar, ¿cuál de los dos jugadores puede garantizar siempre la victoria? y ¿cuál es la estrategia que debe seguir dicho jugador?

Solución

Como Carlos empieza, él puede garantizar la victoria utilizando la siguiente estrategia:

1. Como primera jugada marca el cuadro central.
2. A partir del segundo turno, a cada jugada que realice Lorena, escogiendo uno o un par de cuadrados de acuerdo a las reglas, Carlos responde marcando el cuadrado, o el par de cuadrados, simétricos respecto al cuadrado central.

Como el tablero consta de 5×5 cuadrados, entonces hay un cuadrado central. Y como la primera jugada de Carlos elimina el centro, entonces cada cuadrado va a tener su correspondiente simétrico. Para cada cuadrado que marque Lorena existe (sin marcar) el cuadrado simétrico, por lo que puede ser escogido por Carlos, esto mismo ocurre si ella elige un par de cuadrados. Lo anterior se debe a que él, a partir de su segundo turno, solo marca los cuadrados en respuesta simétrica a los que ella escoge. Este proceso agotará los cuadrados disponibles y la última jugada posible la habrá hecho Carlos, derrotando de esta forma a Lorena.

Un ejemplo de tablero final es el siguiente, en donde se siguió el proceso descrito.

	L	L		C
C			C	C
		C		
L	L			L
L		C	C	

4.4. 28a. OMM Estado de Veracruz

Problema 13. El lobo y Caperucita están realizando un juego con divisores de 2014. El lobo empieza con el número 1 y Caperucita con el número 2014. Por turnos, cada jugador cambia su número por otro divisor de 2014 mediante la operación de multiplicar o dividir por un número primo. El lobo ganará el juego si "alcanza" a Caperucita consiguiendo que sus números coincidan, pero Caperucita ganará si consigue hacer 100 cambios de número sin ser alcanzada. Si el lobo es quien inicia el juego y cada jugador sigue la estrategia que más le conviene, ¿quién gana?

Solución

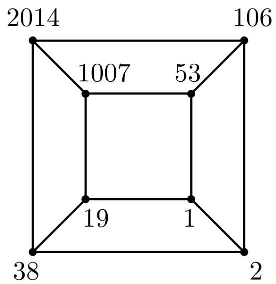
La factorización en números primos de 2014 es

$$2014 = 2 \times 19 \times 53,$$

por lo que los divisores de 2014 son:

$$1,\ 2,\ 19,\ 38,\ 53,\ 106,\ 1007,\ 2014.$$

De esta forma, tanto el lobo como Caperucita solo pueden tener estos números. Como ellos cambian los números que tengan por el resultado de dividir o multiplicar el número actual por algún primo, entonces los únicos cambios que se pueden hacer entre los números están representados por la siguiente gráfica.



En este sentido, cambiar un número significa pasar de un vértice a otro a través de la arista que los une, la cual representa la operación de dividir o multiplicar por un número primo. Observemos que para que el resultado también sea divisor de 2014, el primo no puede ser cualquiera sino divisor de 2014, es decir, debe ser 2, 19 o 53.

El juego empieza con el lobo en el vértice 2014 y con Caperucita en el 1. Siempre es posible que Caperucita mantenga la estructura inicial, es decir, encontrarse en esquinas opuestas, uno en el cuadrado exterior y el otro en el cuadrado interior. Por lo que para cualquier cambio que haga el lobo, Caperucita puede responder reestableciendo la estructura y manteniéndose a tres aristas de distancia del lobo. Por lo que Caperucita será la ganadora del juego.

Observemos que la gráfica la podemos interpretar como un cubo. Solo bastará que Caperucita se mantenga siempre en la esquina opuesta a donde se encuentra el lobo respecto al centro del cubo.

Problema 14. Encuentra todos los números de tres dígitos $n = abc$ de tal forma que a, b y c son dígitos positivos distintos entre sí, abc es múltiplo de 2, bca es múltiplo de 3 y cab es múltiplo de 5.

Solución 1

Como cab es múltiplo de 5 y $b > 0$, entonces $b = 5$. Como abc es múltiplo de 2 entonces c tiene que ser dígito par, por lo que $c = 2, 4, 6, 8$. Notemos que $a + b + c$ debe ser un múltiplo de tres y además

$$3 = 1 + 1 + 1 \leq a + b + c \leq 9 + 9 + 9 = 27.$$

Luego, dado que $b = 5$ y a, b y c son distintos, la menor suma que se puede obtener es $1 + 5 + 2 = 8$, por lo que se descartan 3 y 6. A continuación, 9 se descarta puesto que $9 = 2 + 5 + 2$. Además, el mayor número que podemos formar es $9+5+8 = 22$, por lo que descartamos 24 y 27, y como $21 = 8+5+8$, también se descarta. De esta manera $a + b + c$ solo puede ser 12, 15 o 18, por lo que $a + c = 7, 10, 13$ y, así, los números que obtenemos son: $n = 852$, 354, 654, 954, 156, 456, 756, 258.

Solución 2

Al igual que en la Solución 1, inicialmente tenemos que $b = 5$, $c = 2, 4, 6, 8$ y $a + b + c$ debe ser múltiplo de tres entre 3 y 27. De esta manera $a + c = 4, 7, 10, 13, 16, 19$. Así, tenemos:

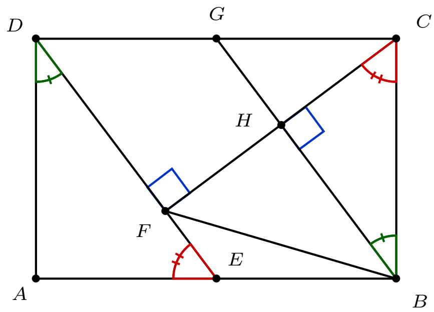
- Para $c = 2$, $a = 2, 5, 8$ por lo que $n = 252$, 552, 852.
- Para $c = 4$, $a = 3, 6, 9$ por lo que $n = 354$, 654, 954.
- Para $c = 6$, $a = 1, 4, 7$ por lo que $n = 156$, 456, 756.
- Para $c = 8$, $a = 2, 5, 8$ por lo que $n = 258$, 558, 858.

Finalmente, descartando los números que tienen dígitos repetidos, obtenemos: $n = 852$, 354, 654, 954, 156, 456, 756, 258.

Problema 15. Considera un rectángulo $ABCD$ donde los lados miden $AB = CD = 6$ y $BC = AD = 4$. Si E es el punto medio de AB y F es un punto entre D y E tal que $BF = 4$, encuentra el área del triángulo $\triangle CDF$.

Solución 1

Por el Teorema de Pitágoras $DE = \sqrt{AD^2 + AE^2} = 5$. Sean G el punto medio de CD y H la intersección de BG con CF. Como los segmentos BE y DG son paralelos y miden lo mismo, entonces $BGDE$ es un paralelogramo, así DE y BG son paralelos.



Luego, por el Teorema de Thales, H es punto medio de CF y como $\triangle BCF$ es isósceles con $BC = BF$, entonces BG y CF son perpendiculares. Por lo tanto $\triangle CDF$ es un triángulo rectángulo con $\measuredangle CFD = 90°$.

Por otro lado, como $\triangle AED$ y $\triangle HCB$ son triángulos rectángulos y

$$\begin{aligned} \measuredangle ADE + \measuredangle FDC &= 90°, \\ \measuredangle HCB + \measuredangle DCF &= 90°, \end{aligned}$$

entonces $\measuredangle ADE = \measuredangle DCF = \measuredangle CBH$. Por lo que $\triangle AED$, $\triangle HCB$ y $\triangle FDC$ son semejantes, de donde

$$\begin{aligned} \frac{HC}{AE} &= \frac{BC}{DE}, \\ \frac{DF}{AE} &= \frac{DC}{DE}. \end{aligned}$$

De esta manera, si $x = FH = HC$ y $y = DF$, entonces

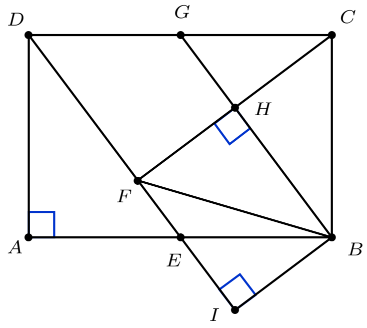
$$\begin{aligned} \frac{x}{3} &= \frac{4}{5}, \\ \frac{y}{3} &= \frac{6}{5}, \end{aligned}$$

lo cual implica que $x = \frac{12}{5}$ y $y = \frac{18}{5}$. Finalmente utilizamos esta información para obtener el área buscada:

$$(\triangle CDF) = \frac{y \cdot 2x}{2} = \frac{12}{5}\frac{18}{5} = \frac{216}{25}.$$

Solución 2

Al igual que al inicio de la solución anterior, tenemos que $DE = 5$, además de que DE y BG son paralelos, así como BG y CF son perpendiculares. Sea I en DE tal que $\measuredangle BID = 90°$.



Tenemos que $BHFI$ es un rectángulo y además los triángulos $\triangle ADE$ y $\triangle IBE$ son semejantes, lo cual implica que

$$\frac{IB}{AD} = \frac{EI}{AE} = \frac{BE}{DE}.$$

Al sustituir los valores conocidos tenemos

$$\frac{IB}{4} = \frac{EI}{3} = \frac{3}{5},$$

de donde $IB = \frac{12}{5}$ y $EI = \frac{9}{5}$. Como $BHFI$ es un rectángulo, entonces $FH = IB = \frac{12}{5}$, por el Teorema de Pitágoras $BH = \sqrt{BF^2 - FH^2} = \frac{16}{5}$. Tenemos entonces que

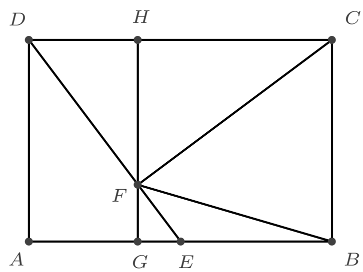
$$(BHFE) = (BHFI) - (\triangle IBE) = FH \cdot BH - \frac{IB \cdot EI}{2} = \frac{138}{25}.$$

Finalmente

$$(\triangle CDF) = (ABCD) - (BHFE) - (\triangle ADE) - (\triangle BCH) = \frac{216}{25}.$$

Solución 3

Sean G y H los puntos de intersección de AB y CD con una paralela a AD que pasa por F. Sean $x = GF$, $y = FH$ y $z = GE$.



Como GF es paralela a AD, entonces $\triangle AED$ y $\triangle GEF$ son semejantes, lo cual implica que $\frac{EG}{AE} = \frac{GF}{AD}$, de donde

$$x = \frac{4}{3}z.$$

Por otro lado, como $\triangle GBF$ es un triángulo rectángulo, por el Teorema de Pitágoras tenemos $BF^2 = BG^2 + GF^2$, es decir, $4^2 = (3+z)^2 + x^2$, de donde obtenemos la ecuación

$$25z^2 + 54z - 63 = 0,$$

la cual tiene una única solución positiva, que es $z = \frac{42}{50}$. Luego, obtenemos que

$$x = \frac{4}{3}z = \frac{28}{25}.$$

Como $x + y = 4$, entonces la altura de $\triangle CDF$ es

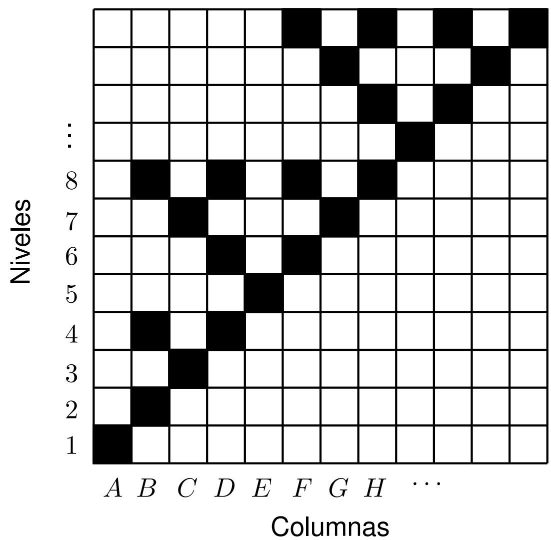
$$y = 4 - x = \frac{72}{25}.$$

De donde llegamos a obtener el área buscada:

$$(\triangle CDF) = \frac{CD \cdot y}{2} = \frac{216}{25}.$$

Problema 16. En una cuadrícula de tamaño $2014^{2014} \times 2014^{2014}$ se pintaron de negro muchos cuadritos, iniciando con el de la esquina inferior izquierda, bajo las siguientes reglas: se pintan de negro todos los cuadritos del nivel, que compartan solo una esquina con solo un cuadrito negro del nivel inferior y que no toquen el borde izquierdo de la cuadrícula. En la figura se muestra la esquina inferior izquierda de la cuadrícula por donde se inició el proceso.

¿En qué nivel está el cuadrito negro número 2014 de la columna D?



Solución

Observemos que el primer cuadrito negro en la columna D aparece en el nivel 4. A partir de tal nivel se empiezan a acumular por grupos; en el nivel 8 se han pintado 3 cuadritos, en el nivel 16 se han pintado 5, etc. Tenemos el siguiente patrón:

Nivel	Número de cuadritos negros en la columna D
2^2	$2(0)+1$
2^3	$2(1)+1$
2^4	$2(2)+1$
$\vdots$	$\vdots$
2^n	$2(n-2)+1$

Como $2015 = 2(1007)+1 = 2(1009-2)+1$, entonces en el nivel 2^{1009} habremos pintado 2015 cuadritos negros. El cuadrito negro número 2014 se encuentra dos niveles abajo, es decir, en el nivel

$$2^{1009} - 2.$$

4.5. 28a. OMM primer examen selectivo

Problema 17. Determina cuál número es mayor 2014^{2014} o bien 2015^{2013}.

Solución

Observemos que $2015^{2013} = (2014+1)^{2013}$ y por el Teorema del Binomio de Newton tenemos que

$$\begin{aligned} 2015^{2013} &= \sum_{k=0}^{2013} \binom{2013}{k} 2014^{2013-k} \\ &= 2014^{2013}\left[\sum_{k=0}^{2013} \frac{1}{2014^{2013}} \frac{2013!}{k!(2013-k)!} 2014^{2013-k}\right] \\ &= 2014^{2013}\left[1 + \sum_{k=1}^{2013} \frac{2013!}{2014^k k!(2013-k)!}\right]. \end{aligned}$$

Como $\frac{2013!}{(2013-k)!}$ es el producto de k factores menores o iguales a 2013, entonces $\frac{2013!}{(2013-k)!} < 2014^k k!$, lo cual implica que $\frac{2013!}{2014^k k!(2013-k)!} < 1$. Por lo tanto, obtenemos la relación:

$$1 + \sum_{k=1}^{2013} \frac{2013!}{2014^k k!(2013-k)!} < 2014.$$

Finalmente, podemos asegurar que

$$2015^{2013} < 2014^{2013} 2014 = 2014^{2014}.$$

Problema 18. Decimos que un número entero positivo n es *sieteable* si cumple alguna de las siguientes opciones:

1. El número n es divisible por 7.

2. Si el número no es divisible por 7 se le agrega al final el dígito que es el residuo de n al dividir entre 7 y vemos si es divisible por 7, si no entonces se repite la operación hasta llegar a un múltiplo de 7.

Determina cuáles de los siguientes números son *sieteable*s:

$$1, 2, \ldots, 2014.$$

Solución 1
Los únicos números sieteables entre 1 y 2014 son los múltiplos de 7. Para ver esto, consideremos un número m que no es divisible por 7 y sea k un número positivo menor que 7 tal que

$$m \equiv k \pmod{7}.$$

Por lo tanto, en el siguiente paso obtenemos que

$$10m + k \equiv 11k \pmod{7},$$

y este último número no es divisible por 7.

Solución 2
Si m no es divisible por 7 y es congruente con 1, entonces en el primer paso tenemos

$$10m + 1 \equiv 11 \equiv 4 \pmod{7}.$$

Si repetimos el proceso tenemos

$$\begin{aligned} 100m + 14 &\equiv 44 \equiv 2 \pmod{7}, \\ 1000m + 142 &\equiv 22 \equiv 1 \pmod{7}. \end{aligned}$$

De esta forma, los residuos correspondientes, de todos los números que se van construyendo, pertenecen al conjunto $\{1, 2, 4\}$. Lo mismo ocurre si m es congruente con 2 o con 4.

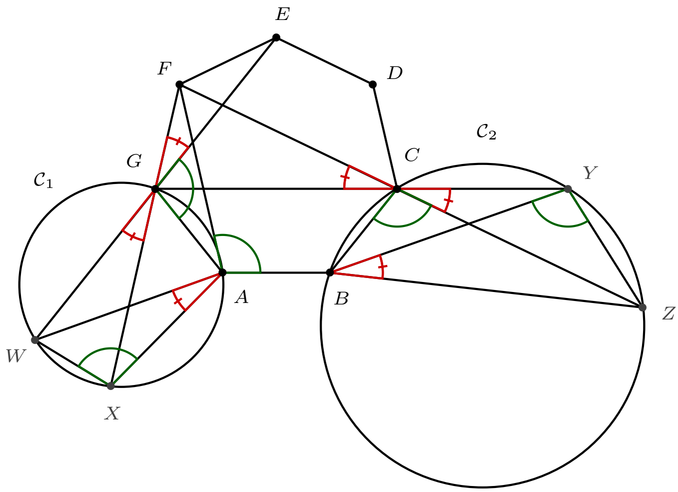
Por otro lado, si el número m es congruente con 3, 5 o 6, entonces los residuos correspondientes pertenecen al conjunto $\{3, 5, 6\}$.

Por lo tanto, si el número m no es divisible por 7, no es sieteable.

Problema 19. Consideremos un heptágono regular $ABCDEFG$ y dos circunferencias de radios distintos $\mathcal{C}_1$ (que pasa por los puntos A y G) y $\mathcal{C}_2$ (que pasa por los puntos B y C). Si W y X son las intersecciones de EG y FG con $\mathcal{C}_1$, respectivamente, a la vez que Y y Z son las intersecciones de GC y FC con $\mathcal{C}_2$, respectivamente, demuestra que $AX \cdot BZ = AW \cdot BY$.

Solución
Por ser $AGWX$ un cuadrilátero cíclico tenemos que

$$\begin{aligned} &\measuredangle XAW = \measuredangle XGW = \measuredangle EGF, \\ &\measuredangle WXA = \measuredangle AGE. \end{aligned}$$



Como el heptágono es regular, entonces es cíclico. De esta forma, al abrazar arcos de la misma longitud, tenemos que

$$\measuredangle EGF = \measuredangle FCG = \measuredangle ZCY,$$
$$\measuredangle AGE = \measuredangle BAF = \measuredangle BCY.$$

La última igualdad se obtiene al considerar el cuadrilátero cíclico $ABCF$. Luego, si consideramos el cuadrilátero $BZYC$ inscrito en $\mathcal{C}_2$, tenemos

$$\measuredangle ZCY = \measuredangle ZBY,$$
$$\measuredangle BCZ = \measuredangle BYZ.$$

Por lo tanto,

$$\measuredangle XAW = \measuredangle ZBY,$$
$$\measuredangle WXA = \measuredangle BYZ.$$

Así, por el criterio AA, los triángulos $\triangle AXW$ y $\triangle BYZ$ son semejantes, de donde $\frac{AX}{BY} = \frac{AW}{BZ}$. Finalmente, lo anterior implica que

$$AX \cdot BZ = AW \cdot BY.$$

Problema 20. En un polígono regular de 2014 lados, cada diagonal se pinta usando uno de n colores de manera que no hay dos diagonales del mismo color que se cruzan en el interior del polígono. ¿Cuál es el menor valor de n para el cual es posible hacer esto?

Solución
Como las 1007 diagonales principales parten al polígono por la mitad, es claro que todas ellas se cortan entre sí y, por lo tanto, no puede haber dos diagonales del mismo color. Necesitamos, en consecuencia, al menos 1007 colores.

Por otro lado, es posible pintar el polígono con 1007 colores cumpliendo las condiciones del problema. Una forma es la que sigue: numeramos los vértices del polígono de manera consecutiva $1, 2, 3, \ldots, 2014$, usamos un color para pintar las siguientes diagonales: $2-2014, 2014-3, 3-2013, 2013-4, 4-2012,$ $2012-5$, ..., $1006-1010$, $1010-1007$, $1007-1009$, por lo que quedan sin usarse los vértices 1 y 1008. Estas diagonales forman una poligonal de 2012 vértices y 2011 diagonales. Estas 2011 diagonales se cortan justo sobre los vértices del polígono y no en su interior, por lo que se cumple la restricción del problema.

Al usar otro color podemos crear una nueva poligonal que no use los vértices 2 y 1009, después otra que no use los vértices 3 y 1010, etc. En total, por cada pareja de vértices opuestos estamos pintando $2014-3=2011$ diagonales. En total, pintamos $\frac{2014}{2}(2014-3)$ diagonales, que son todas las que tiene el polígono. Por lo tanto, la coloración completa sirve, y bastó usar $\frac{2014}{2}=1007$ colores para pintar las diagonales.

4.6. 28a. OMM segundo examen selectivo

4.6.1. Primer día

Problema 21. El entero positivo n y el primo p cumplen que p no divide a $(3n)!$ pero sí divide a

$$(3n+1)!+(3n+2)!.$$

Muestra que 3 divide a $p-1$.

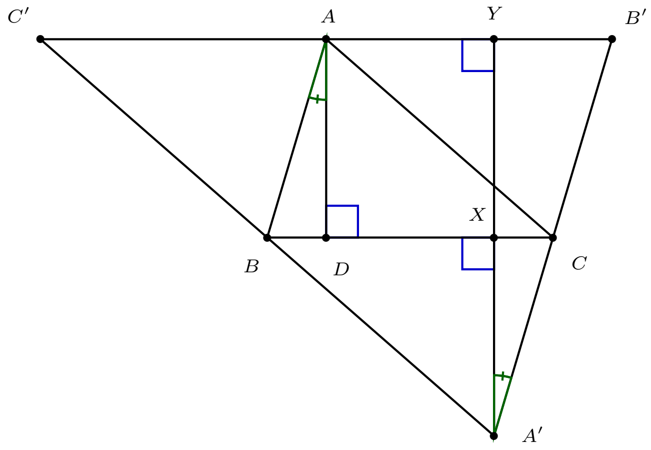
Solución
Observemos que

$$\begin{aligned}(3n+1)!+(3n+2)! &= (3n)![3n+1+(3n+1)(3n+2)]\\ &= (3n)!(3n+1)(3n+3)\\ &= 3(3n)!(3n+1)(n+1).\end{aligned}$$

Como p divide al primer miembro de la igualdad, también divide al último, pero por ser primo debe dividir a alguno de los 4 factores. Sin embargo, por hipótesis p no divide a $(3n)!$, así que no puede dividir tampoco a 3 ni a $n+1$, pues estos dos factores están en $(3n)!$. Entonces debe dividir a $3n+1$. Por lo tanto, $3n+1$ es el primer número divisible por p, por lo que es p, de donde $p-1=3n$ y esto prueba que $p-1$ es múltiplo de 3.

Problema 22. Sean $\triangle ABC$ un triángulo acutángulo y D, E y F los respectivos pies de las alturas en A, B y C. Sean D', E' y F' puntos sobre los segmentos BC, CA y AB, respectivamente, tales que $BD=D'C$, $CE=E'A$ y $AF=F'B$. Prueba que las perpendiculares a BC en D', a CA en E' y a AB en F' son concurrentes.

Solución 1
Consideremos rectas paralelas a los lados de $\triangle ABC$ que pasan por los vértices, formándose el triángulo $\triangle A'B'C'$ como en la figura.

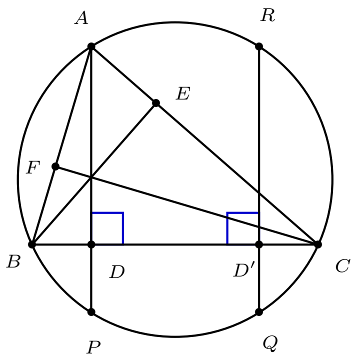


Por construcción, $\triangle ABC$ es el triángulo medial de $\triangle A'B'C'$ en donde, además, los triángulos $\triangle ABC$, $\triangle A'CB$, $\triangle CB'A$ y $\triangle BAC'$ son congruentes.

Sea X el pie de la altura desde el vértice A' en $\triangle A'CB$, luego $AD = A'X$. Por el criterio LAL, tenemos que los triángulos $\triangle ABD$ y $\triangle A'CX$ son congruentes. Lo anterior implica que $BD = XC$ y, así, $X = D'$. De esta manera, la perpendicular a BC en D' es la altura $A'Y$ de $\triangle A'B'C'$, puesto que BC y $B'C'$ son paralelos.

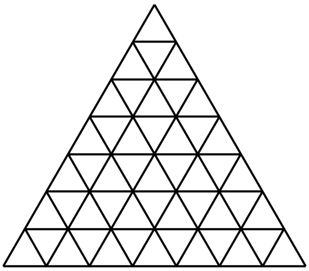
De igual manera, podemos ver que las perpendiculares a AC en E' y a AB en F' son alturas de $\triangle A'B'C'$, por lo que $C'F'$, $A'D'$ y $B'E'$ concurren.

Solución 2
Construyamos el circuncírculo de $\triangle ABC$ y prolonguemos las perpendiculares del enunciado y las alturas hasta que toquen el circuncírculo. Por ejemplo, en la figura se muestran las prolongaciones de AD y de la perpendicular a BC en D, y los puntos en que estas encuentran al circuncírculo son P, Q y R, como se indica.



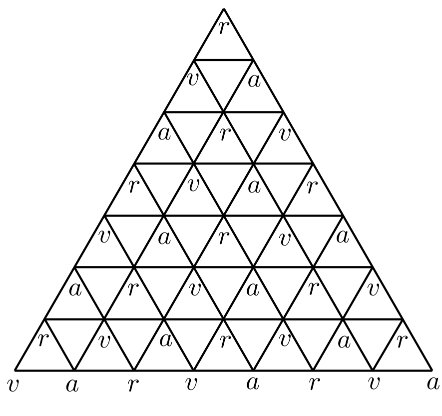
Entonces, las cuerdas AP y QR son paralelas y de la misma longitud, puesto que ambas son perpendiculares a BC y $BD = DC$, es decir, QR se obtiene reflejando AP a través del centro. Esto mismo ocurre con las otras perpendiculares con respecto a las alturas correspondientes. Como las alturas concurren, entonces también concurren las perpendiculares (y lo hacen en el reflejado del ortocentro con respecto al centro del circuncírculo).

Problema 23. Un triángulo equilátero de lado 7 se divide en triángulos equiláteros de lado 1 (como en la figura). Se pintan todos los vértices de los triángulos usando los colores rojo, verde y azul, de manera que cada triangulito de lado 1 tiene un vértice de cada color. Prueba que si se eligen segmentos (de lado 1) de modo que cada vértice pertenece a exactamente un segmento, entonces el número de segmentos elegidos que van de un vértice rojo a uno azul es el mismo que el número de segmentos que van de un vértice rojo a uno verde.



Solución 1

Observemos que el número de vértices es igual a $1 + 2 + 3 + \cdots + 8 = 36$, de los cuales hay 12 de cada color. El número de segmentos elegidos es $\frac{36}{2} = 18$. Veamos que hay 6 segmentos rojo-azul, 6 segmentos rojo-verde y 6 segmentos azul-verde. En caso contrario, hay al menos 7 segmentos de alguna de dichas combinaciones, digamos rojo-azul. Por lo que quedarían apareados al menos 7 vértices rojos y 7 azules, quedando a lo más 5 de cada uno de estos colores, es decir, a lo más 10 vértices para aparear con los 12 vértices verdes, lo cual es un absurdo.



Solución 2
Coloreamos los triangulitos con dos colores, digamos negro y blanco, de manera que a triangulitos adyacentes les toque distinto color y al triangulito superior le toque el color negro. De esta manera, cada segmento pertenece a un único segmento negro. Cada uno de estos triangulitos tiene exactamente un segmento rojo-verde y un segmento rojo-azul (esto es poque la condición del problema dice que cada triangulito tiene los tres colores en sus vértices). De esta manera, es posible aparear estos y son el mismo número.

4.6.2. Segundo día

Problema 24. Prueba que si a, b, c y d son números reales positivos, entonces

$$4a^2 + 2b^4 + c^8 + d^8 \geq 8abcd.$$

Solución 1
Sabemos que si x y y son reales, entonces $0 \leq (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$, de donde $x^2 + y^2 \geq 2xy$. Al aplicar esta desigualdad tres veces, obtenemos las relaciones

$$\begin{aligned} 4a^2 + 2b^4 + c^8 + d^8 &\geq 4a^2 + 2b^4 + 2c^4d^4 \\ &\geq 4a^2 + 4b^2c^2d^2 \\ &\geq 8abcd. \end{aligned}$$

Solución 2
La desigualdad entre Media Geométrica-Media Aritmética nos dice que si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son reales positivos, entonces

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

Al aplicar esta desigualdad obtenemos las relaciones

$$\begin{aligned} 4a^2 + 2b^4 + c^8 + d^8 &= a^2 + a^2 + a^2 + b^4 + b^4 + c^8 + d^8 \\ &\geq 8\sqrt[8]{a^2a^2a^2a^2b^4b^4c^8d^8} \\ &= 8\sqrt[8]{a^8b^8c^8d^8} \\ &= 8abcd. \end{aligned}$$

Problema 25. Los vértices de un polígono regular de 160 lados están numerados en el sentido de las manecillas del reloj del 1 al 160. En un juego, Manuel debe escoger un vértice y ponerle una marca. Después seguirá marcando algunos vértices de acuerdo a la siguiente regla: cada vez que marque un vértice con número par girará en el sentido de las manecillas del reloj el mismo número de vértices que indique el vértice que acaba de marcar (por ejemplo, si escoge el vértice 42 marcará este, luego el 84, luego el 8, etc.). En caso de que en algún momento marque un vértice con un número impar, entonces hará lo mismo que con el par pero en el sentido contrario al de las manecillas del reloj. Irá marcando vértices hasta que llegue a un vértice ya marcado y ahí termina su juego. ¿Cuál es el máximo número de vértices que puede marcar?

Solución

Observemos que si Manuel marca un vértice impar, entonces su siguiente marca será en el 160 y el juego terminará en el siguiente paso, porque regresará al 160.

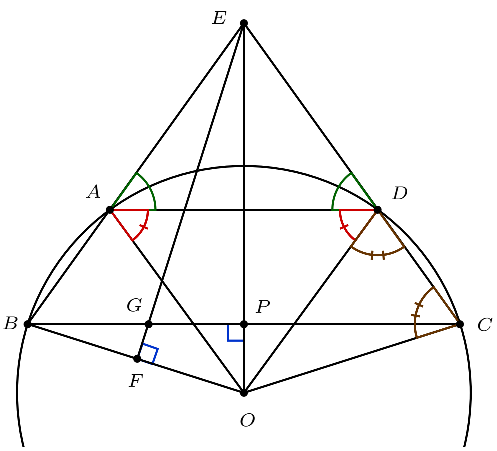
Supongamos ahora que Manuel escoge el vértice con número 2. Entonces marcará los ocho vértices siguientes: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 y 96, puesto que $256 - 160 = 96$ y $96 \cdot 2 - 160 = 192 - 160 = 32$.

Veamos ahora que es imposible que Manuel marque más de ocho. Supongamos que escoge el vértice $2a$ (con $a \leq 80$). Si no repitiera, los vértices marcados depués de ocho pasos serían los residuos módulo 160 de los números: $2a$, $4a$, $8a$, $16a$, $32a$, $64a$, $128a$, $96a$. En el siguiente paso llegará al $32a$ módulo 160, que ya habría estado marcado.

Problema 26. Considera un cuadrilátero cíclico $ABCD$, tal que las cuerdas AD y BC son paralelas, $AD < BC$ y el centro O del circuncírculo de $ABCD$ queda en el exterior del cuadrilátero. Sean E la intersección de las rectas AB y CD, F el pie de la altura de $\triangle EBO$ en E y G la intersección de EF con BC. Demuestra que $AGOCE$ es cíclico.

Solución 1

Sea P la intersección de EO con BC. Observemos que EO y BC son perpendiculares. Por otro lado, como O es el centro del circuncírculo de $ABCD$, entonces $\triangle OBC$ es isósceles con $\measuredangle CBO = \measuredangle BCO$. Además, como $\measuredangle BPO = 90° = \measuredangle EFO$ y $\measuredangle BOP = \measuredangle EOF$, entonces por el criterio AA los triángulos $\triangle BOP$ y $\triangle EOF$ son semejantes, lo cual implica que $\measuredangle GEO = \measuredangle PBO = \measuredangle GCO$. Se sigue que $GOCE$ es un cuadrilátero cíclico.



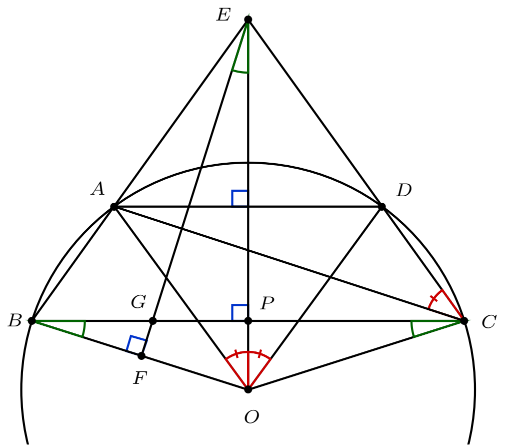
Por otro lado, como $\triangle AOD$, $\triangle DOC$ y $\triangle AED$ son triángulos isósceles, entonces obtenemos las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}\measuredangle OAE + \measuredangle OCE &= \measuredangle OAD + \measuredangle DAE + \measuredangle OCD \\ &= \measuredangle ODA + \measuredangle ADE + \measuredangle CDO \\ &= 180^\circ,\end{aligned}$$

lo cual implica que $AOCE$ es un cuadrilátero cíclico. Concluimos que $AGOCE$ es cíclico.

Solución 2

Sea P la intersección de EO con BC, entonces $\measuredangle EPB = 90^\circ$. Como O es el centro del circuncírculo de $ABCD$, entonces $\triangle OBC$ es isósceles con $\measuredangle CBO = \measuredangle BCO$. Además, como $\measuredangle BFG = 90^\circ = \measuredangle EPG$ y $\measuredangle BGF = \measuredangle EGP$, entonces por el criterio AA los triángulos $\triangle BFG$ y $\triangle EPG$ son semejantes, lo cual implica que $\measuredangle GEO = \measuredangle GBO = \measuredangle BCO$. Por lo tanto, $GOCE$ es un cuadrilátero cíclico.



Por otro lado, como $\triangle AOD$ es isósceles y EO es perpendicular a AD, entonces también es bisectriz, por lo que

$$\measuredangle AOE = \frac{1}{2}\measuredangle AOD = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD}\ .$$

Y como $\measuredangle ACD$ es un ángulo inscrito, entonces

$$\measuredangle ACE = \measuredangle ACD = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD}\ .$$

De esta forma se sigue que $AOCE$ es un cuadrilátero cíclico. Concluimos que $AGOCE$ es cíclico.

Capítulo 5

Soluciones de los problemas de entrenamiento

Problema 1. (Problema 3 del Examen Estatal de la 2a. OMM Veracruz de 1988) Un faro emite tres colores distintos:

- Rojo cada 16 segundos.
- Verde cada 45 segundos.
- Blanco cada 2 minutos 20 segundos.

Los tres colores se emiten simultáneamente a media noche, es decir, a las cero horas. Indica los instantes del día en que:

1. Se emiten simultáneamente rojo y verde.
2. Se emiten simultáneamente rojo y blanco.
3. Se emiten simultáneamente verde y blanco.
4. Se emiten simultáneamente los tres colores.

Solución

1. Ya que $\mathrm{mcm}(16, 45) = 720$, entonces se emiten simultáneamente rojo y verde cada 720 segundos, es decir, cada 12 minutos, esto es:

$$(00:00:00), (00:12:00), (00:24:00), \ldots$$

2. Ya que $\mathrm{mcm}(140, 16) = 560$, entonces se emiten simultáneamente rojo y blanco cada 560 segundos, es decir, 9 minutos y 20 segundos, esto es:

$$(00:00:00), (00:09:20), (00:18:40), \ldots$$

3. Ya que $\text{mcm}(45, 140) = 1260$, entonces se emiten simultáneamente verde y blanco cada 1260 segundos, es decir, cada 21 minutos, esto es:

$$(00 : 21 : 00), (00 : 42 : 00), (01 : 03 : 00), \ldots$$

4. Ya que $\text{mcm}(16, 45, 140) = 5040$, entonces se emiten simultáneamente rojo, verde y blanco cada 5040 segundos, es decir, cada 84 minutos, esto es:

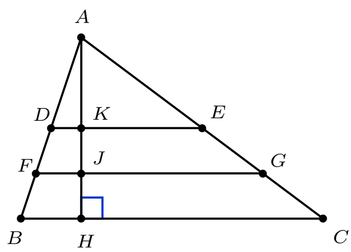
$$(00 : 00 : 00), (01 : 24 : 00), (02 : 48 : 00), \ldots$$

Problema 2. (Problema 1 del Examen Estatal de la 4a. OMM Veracruz de 1990) Una clase tiene 25 pupitres arreglados en un cuadrado de 5×5. La maestra quiere cambiar el orden en que están sentados sus alumnos moviendo a cada estudiante a un pupitre adyacente (uno adelante, uno atrás, uno a la derecha o uno a la izquierda). Si es posible, explica cómo hacerlo. Si no es posible, da la razón por la que no se puede hacer.

Solución
Consideremos una coloración tipo ajedrez: tenemos 13 alumnos en un color y 12 en otro. Como cada alumno debe cambiar de un pupitre de un color a otro de otro color (ese es el movimiento permitido), entonces habrá un alumno que no podrá cambiarse de pupitre. Así, no es posible cambiar el orden en que están sentado conforme a la regla establecida.

Problema 3. (Problema 1 del Examen Estatal de la 2a. OMM Veracruz de 1988) Sean $\triangle ABC$ un triángulo cualquiera, en donde D y F son puntos sobre AB, tales que $AD = DB$ y $DF = FB$; además, E y G son puntos sobre AC, tales que $AE = EC$ y $EG = GC$. Encuentra la razón de las áreas de los trapecios $EDFG$ y $EDBC$.

Solución 1
Como $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$, por el Teorema de Thales tenemos que DE, FG y BC son paralelos. Sean H, K y J los pies de A sobre BC, DE y FG, respectivamente. Luego $\frac{AD}{DB} = \frac{AK}{KH}$ y $\frac{DF}{FB} = \frac{KJ}{JH}$. De aquí que $AK = KH$ y $KJ = JH$, por lo tanto K y J son los puntos medios de AH y KH, respectivamente.



Por otra parte, como $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ y $\measuredangle BAC = \measuredangle DAE$, entonces, por el criterio LAL, $\triangle BAC$ y $\triangle DAE$ son semejantes, de donde

$$\frac{1}{2} = \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC},$$

lo cual implica que $DE = \frac{BC}{2}$. Considerando el trapecio $EDBC$, como FG une los puntos medios de DB y EC, su longitud es

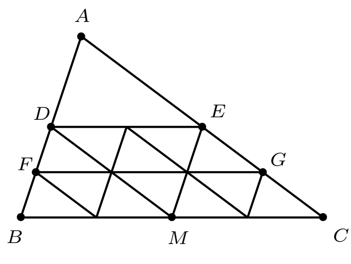
$$FG = \frac{DE + BC}{2} = \frac{\frac{BC}{2} + BC}{2} = \frac{\frac{3}{2}BC}{2} = \frac{3BC}{4}.$$

Entonces, la razón entre las áreas de los trapecios $EDFG$ y $EDBC$ es igual a

$$\begin{aligned} \frac{(EDFG)}{(EDBC)} &= \frac{\frac{DE+FG}{2}KJ}{\frac{DE+BC}{2}KH} \\ &= \frac{\frac{DE+FG}{2}KJ}{\frac{DE+BC}{2}2KJ} \\ &= \frac{DE+FG}{2(DE+BC)} \\ &= \frac{\left(\frac{BC}{2} + \frac{3BC}{4}\right)}{2\left(\frac{BC}{2} + BC\right)} \\ &= \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

Solución 2

Sea M el punto medio de CB; si unimos D, E y M, dividimos el triángulo $\triangle ABC$ en 4 triángulos iguales.



Al trazar el segmento FG cortamos a DM y a EM en sus respectivos puntos medios. En seguida, trazamos líneas desde los puntos medios de los lados de los triángulos $\triangle BDM$, $\triangle DEM$ y $\triangle MEC$ y dividimos estos triángulos, dejando el trapecio $BDEC$ conformado por 12 triángulos iguales, 5 de los cuales conforman el trapecio $EDFG$. Así, la razón buscada es $\frac{5}{12}$.

Problema 4. (Problema A del Examen Estatal de la 23a. OMM Veracruz de 2009) Demuestra que la suma

$$299 + 2999 + 29999 + \cdots + 29999999999999$$

(donde el último número tiene 13 nueves) es divisible entre 12.

Solución 1
Separemos la suma de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} S &= 299+2999+29999+\cdots+29999999999999 \\ &= (200+99)+(2900+99)+\cdots+(2\underbrace{99\ldots9}_{11}00+99) \\ &= (2(10^2)+29(10^2)+\cdots+2\underbrace{99\ldots9}_{11}(10^2))+99(12) \\ &= 10^2(2+29+\cdots+2\underbrace{99\ldots9}_{11})+99(12). \end{aligned}$$

Ahora tenemos que $10^2 \equiv 0 \pmod 4$ y también

$$2+29+\cdots+2\underbrace{99\ldots9}_{11} \equiv (-1)(12) \equiv 0 \pmod 3,$$

debido a que cada sumando es congruente con -1 módulo 3. Como 3 y 4 son primos relativos, tenemos que

$$10^2(2+29+\cdots+2\underbrace{99\ldots9}_{11}) \equiv 0 \pmod{(3)(4)},$$

de esto, se deduce que

$$S \equiv 0 \pmod{12}.$$

Solución 2
Tenemos la siguiente cadena de igualdades:

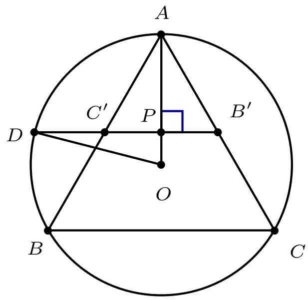
$$\begin{aligned} S &= 299+2999+29999+\cdots+29999999999999 \\ &= (300-1)+(3000-1)+\cdots+(3\underbrace{00\ldots0}_{13}-1) \\ &= \underbrace{33\ldots3}_{12}00-12. \end{aligned}$$

Ya que $\underbrace{33\ldots3}_{12}00$ es divisible por 4 y 3, es divisible por 12, concluimos que 12 divide a S.

Problema 5. (Problema 2 del Examen Estatal de la 4a. OMM Veracruz de 1990) Sean $\triangle ABC$ un triángulo equilátero inscrito en un círculo, B' y C' los puntos medios de los lados CA y BA, respectivamente, y D una intersección de la recta $B'C'$ con el círculo. Demuestra que $\frac{B'C'}{C'D}$ es la razón áurea, esto es:

$$\frac{B'C'}{C'D} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Solución
Es claro que C' se encuentra entre B' y D. Sea O el centro del circuncírculo del triángulo $\triangle ABC$. Sea $a = AB$, por lo que la altura del triángulo equilátero es $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ y el radio de la circunferencia es $OD = OA = \frac{\sqrt{3}}{3}a$. Sea P la intersección de AO con $B'C'$.



Como B' y C' son puntos medios, $\triangle ABC$ y $\triangle AC'B'$ son semejantes, con razón $\frac{1}{2}$. Por lo tanto,

$$AP = \frac{\sqrt{3}}{4}a,$$

y

$$B'C' = \frac{1}{2}a.$$

Además,

$$OP = OA - AP = \frac{\sqrt{3}}{3}a - \frac{\sqrt{3}}{4}a = \frac{\sqrt{3}}{12}a,$$

luego, por el Teorema de Pitágoras $PD^2 = OD^2 - OP^2$ y como $PD = PC' + C'D = \frac{a}{4} + C'D$, se tiene

$$\left(\frac{a}{4} + C'D\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{12}a\right)^2 = \frac{5}{16}a^2,$$

con lo que, al despejar $C'D$, obtenemos

$$C'D = \frac{\sqrt{5}}{4}a - \frac{a}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}a.$$

Finalmente, obtenemos lo que queríamos demostrar:

$$\frac{B'C'}{C'D} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{\sqrt{5}-1}{4}a} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

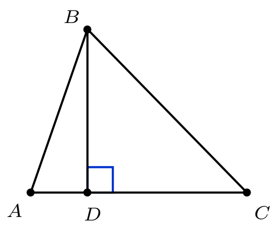
Problema 6. Prueba las siguientes afirmaciones:

1. En un triángulo acutángulo, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

2. En un triángulo obtusángulo, el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos más el doble producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

Solución

1. Si $\triangle ABC$ es un triángulo acutángulo, entonces las alturas trazadas desde cada uno de sus vértices serán internas al triángulo. Sin pérdida de generalidad, tracemos la altura desde el vértice B y llamemos D al pie de esta.



Sean $DA = p$, $BC = a$, $CA = b$, $BA = c$ y $BD = h$. Tenemos que $CD = b - p$ y como $\triangle CDB$ y $\triangle BDA$ son rectángulos, entonces, por el Teorema de Pitágoras tenemos

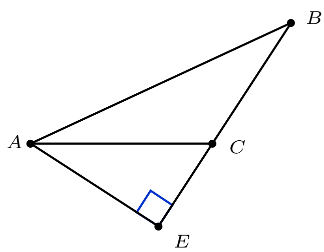
$$a^2 = h^2 + (b-p)^2 \qquad \text{y} \qquad c^2 = h^2 + p^2.$$

Si despejamos h^2 de la segunda ecuación y la sustituimos en la primera obtenemos

$$a^2 = (c^2 - p^2) + (b-p)^2 = c^2 + b^2 - 2bp,$$

que es lo que queríamos demostrar.

2. Consideremos un triángulo $\triangle ABC$ con ángulo obtuso en C. Sea E el pie de la altura trazada desde el vértice A sobre BC.



Llamemos $BC = a$, $CA = b$, $BA = c$, $CE = d$ y $AE = l$. Como los triángulos $\triangle BEA$ y $\triangle ACE$ son rectángulos, entonces, por el Teorema de Pitágoras tenemos

$$c^2 = (a+d)^2 + l^2 \qquad \text{y} \qquad b^2 = l^2 + d^2.$$

Si despejamos l^2 de la segunda ecuación y la sustituimos en la primera obtenemos

$$c^2 = (a+d)^2 + (b^2 - d^2) = a^2 + b^2 + 2ad,$$

que es lo que queríamos demostrar.

Problema 7. (Problema 1 del Examen Estatal de la 6a.OMM Veracruz de 1992) Demuestra que de la igualdad

$$a^2 + b^2 + c^2 = bc + ac + ab,$$

en donde a, b y c son números reales, se deduce que $a = b = c$.

Solución
Multiplicando por 2 a ambos miembros de la igualdad obtenemos la relación:

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 2bc + 2ac + 2ab,$$

la cual, al reagrupar, se transforma en:

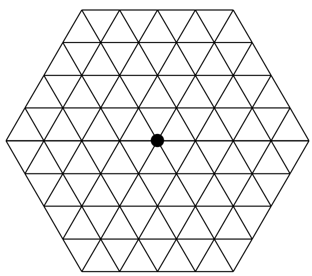
$$\begin{aligned} 2a^2 + & 2b^2 + 2c^2 - 2bc - 2ac - 2ab \\ &= (a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ac + a^2) \\ &= (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \\ &= 0, \end{aligned}$$

es decir,

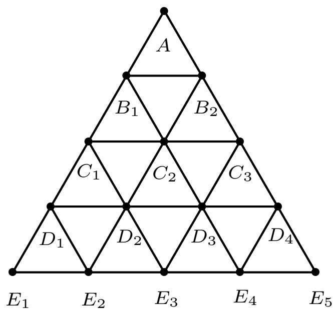
$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0,$$

de aquí se deduce que $a = b = c$.

Problema 8. (Problema F del Examen Estatal de la 24a. OMM Veracruz de 2010) La figura representa una telaraña en la que cada segmento mide 1. La araña se encuentra en el centro y quiere llegar a la orilla caminando por los lados de los triángulos y usando solo 4 segmentos en total. ¿Cuántos caminos distintos puede seguir?



Solución
El hexágono se puede dividir en 6 triángulos iguales como el que se muestra a continuación.



La araña está ubicada en la posición A por lo que el problema se reduce a encontrar cuántas maneras distintas tiene de llegar a alguno de los puntos E_i con $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Observemos que para que la araña logre llegar a la orilla usando solo 4 segmentos debe evitar caminar en alguno de los segmentos horizontales, por lo que al llegar a cada nueva posición solo tendrá dos opciones de camino a seguir; además, observamos que para llegar de A a E_i hay en total 4 niveles (sin contar A mismo), por lo que en total tendrá $2^4 = 16$ maneras distintas de llegar de A a alguno de los puntos en la orilla. Notemos que en estos caminos se están considerando los que van en línea recta de A a alguno de los puntos E_1 y E_5, y que, por ser los lados del triángulo, son comunes con alguno de los otros 5 triángulos en los que fue dividido el hexágono, por lo que a la suma total de caminos debemos restarle estas repeticiones. Así, el número total de caminos que la araña puede tomar para llegar del centro del hexágono a la orilla es

$$(16 \times 6) - 6 = 90.$$

Problema 9. (Problema B del Examen Estatal de la 24a. OMM Veracruz de 2010) Un par ordenado de números de dos dígitos (ab, cd) se llama “centenario” si $(10a + b) + (c + d) = (10c + d) + (a + b) = 100$. ¿Cuántos pares “centenario” hay?

Solución
Observemos la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned}(10a + b) + (c + d) =& (10c + d) + (a + b)\\ 10a + c + b + d =& 10c + a + b + d\\ 10a + c =& 10c + a\\ 9a =& 9c\\ a =& c.\end{aligned}$$

De este modo, $11a + b + d = 100$. Como $0 \leq b + d \leq 18$, tenemos

$$11a \leq 11a + b + d = 100 \leq 11a + 18,$$

esto es, $8 \leq a \leq 9$, por lo que a solo puede ser 8 o 9.

Si $a = 8$ obtenemos $88 + b + d = 100$, esto es, $b + d = 12$ con lo que obtenemos 7 números centenarios.

Si $a = 9$ obtenemos $99 + b + d = 100$, esto es, $b + d = 1$, con lo que obtenemos 2 números centenarios adicionales.

Por lo tanto, hay solamente 9 números centenarios.

Problema 10. (Problema 3 del Examen Estatal de la 3a. OMM Veracruz de 1989) Demuestra que las expresiones

$$2x + 3y \quad \text{y} \quad 9x + 5y$$

son divisibles por 17 para el mismo conjunto de valores x y y.

Solución

Notemos que se cumple la siguiente cadena de dobles implicaciones:

$$\begin{aligned} 17|2x + 3y &\Leftrightarrow 17|9(2x + 3y) \\ &\Leftrightarrow 17|18x + 27y \\ &\Leftrightarrow 17|18x + 10y + 17y \\ &\Leftrightarrow 17|18x + 10y \\ &\Leftrightarrow 17|2(9x + 5y). \end{aligned}$$

Ya que 17 y 2 son primos relativos, se sigue que

$$17|2x + 3y \quad \Leftrightarrow \quad 17|9x + 5y.$$

Problema 11. (Problema 4 del Examen Estatal de la 3a. OMM Veracruz de 1989) Considera una descomposición de un tablero de ajedrez en p rectángulos que no se traslapan y que cumplan las siguientes condiciones:

1. Todo rectángulo tiene igual número de cuadrados blancos que de negros.

2. Todos los rectángulos tienen diferente número de cuadrados.

¿Cuál es la máxima p para la cual es posible esto?

Solución

Dado que cada rectángulo tiene la misma cantidad de cuadrados blancos que de cuadrados negros, la cantidad de cuadrados dentro de cada rectángulo es par. Entonces, el problema se reduce a encontrar la máxima cantidad de rectángulos de área par dentro del tablero (todos con áreas diferentes).

Al considerar la suma de las áreas más pequeñas obtenemos:

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = (2)(1 + 2 + 3 + \cdots + n) = (2)\tfrac{(n)(n+1)}{2} = (n)(n + 1),$$

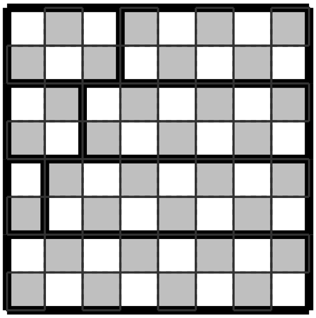
donde buscamos que $(n)(n+1) \leq 64 = (8)(8)$.

Notemos que $56 = (7)(8) < (8)(8) < (8)(9) = 72$, de aquí que no puede haber más de 7 rectángulos.

Observemos que $2+4+\cdots+14 = 56$, mientras que $2+4+\cdots+14+16 = 72$. Veremos si a los rectángulos de áreas $2, 4, \ldots, 12, 14$ se les puede agregar, de alguna manera, los 8 rectángulos restantes. Un acomodo posible es de la siguiente manera:

$$2, 4, 6, 8+2, 10+2, 12+2, 14+2.$$

Por lo tanto, la máxima cantidad de rectángulos es 7 y un posible acomodo es el siguiente:



Problema 12. (Problema 4 del Examen Estatal de la 5a. OMM Veracruz de 1991) Se ha elaborado un programa para que la computadora ordene alfabéticamente en una lista todas las posibles palabras (aunque no sean pronunciables, ni tengan significado) de siete letras que puedan formarse con las letras A, C, E, I, N, O, U, de tal manera que ninguna letra se repita en una misma palabra. Por ejemplo, la palabra $IANOECU$ debe incluirse en la lista, pero no así la palabra $ENACIOA$, ya que aunque consta de siete letras del grupo requerido, en ella se repite la letra A. Así, pues, la computadora escribirá en el lugar 1 de la lista la palabra $ACEINOU$, en el lugar 2 la palabra $ACEINUO$, en el 3 la palabra $ACEIONU$, en el 4 $ACEIOUN$, en el 5 $ACEIUNO$, en el 6 $ACEIUON$, en el 7 $ACENIOU$, etc. ¿Qué palabra escribirá en el lugar 1991?

Solución

Primeramente notemos que al fijar la primera letra de la palabra y dado que esta no debe tener letras repetidas, se tienen $6\times5\times4\times3\times2\times1 = 720$ palabras que inician con la letra que hemos fijado. Así, la palabra que buscamos no puede iniciar con A o C pues las palabras que inician con alguna de estas dos letras suman en total $720 \cdot 2 = 1440$, tampoco puede iniciar con I pues entonces estaríamos contando las palabras que inician con A, C y E, las cuales suman en total $720 \cdot 3 = 2160$. Por lo tanto, la palabra 1991 debe iniciar con E y buscamos, dentro de todas las que inician con esta letra, la que ocupa la posición $1991 - 1440 = 551$.

Si ahora fijamos la segunda letra, entonces el número de palabras que se pueden formar es $5\times4\times3\times2\times1 = 120$; así, la segunda letra de nuestra palabra no puede ser A, C, I o N, pues el total de palabras que tienen como segunda letra a alguna de las anteriores es $120 \cdot 4 = 480$; por lo tanto, la segunda letra de nuestra palabra es O y buscamos, de entre todas las que inician con EO, aquella que ocupa la posición $1991-1440-480 = 71$. Fijando ahora la tercera letra de nuestra palabra, obtenemos que el número de palabras que se puede formar con 4 letras es $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$, por lo que de las letras restantes, ordenadas alfabéticamente, tenemos que la tercera letra no puede ser A o C, pues el total de palabras que tienen a estas dos letras en la tercera posición es $24\cdot2 = 48$. Por lo tanto, la tercera letra de nuestra palabra es I y queremos aquella palabra que ocupa la posición $1991 - 1440 - 480 - 48 = 23$ de entre todas las que inician con EOI.

Al continuar con este algoritmo, obtenemos que la cuarta letra debe ser U debido a que, al fijarla, el número de palabras que se puede formar con 3 letras es $3\times2\times1 = 6$ y el total de palabras que en la cuarta posición tienen A, C o N es $6 \cdot 3 = 18$. De entre las palabras que inician con $EOIU$, queremos ahora la que está en la posición $(1991 - 1440) - 480 - 48 - 18 = 5$ y, por un argumento similar, la quinta letra es N, la sexta es C y la última es A. De esta manera, la palabra 1991 es

$$EOIUNCA.$$

Problema 13. (Problema C del Examen Estatal de la 12a. OMM Veracruz de 1998) Supongamos que queremos formar 5 pilas de cajas con las siguientes condiciones: cada pila debe tener entre una y cinco cajas, además, cada pila no puede tener más cajas que la pila de su izquierda. ¿De cuántas formas podemos hacer esto?

Solución

Denotemos por (a, b, c, d, e) un arreglo de pilas de cajas donde a, b, c, d, e denotan el número de cajas que tienen las pilas. Queremos que estos satisfagan $a \geq b \geq c \geq d \geq e$. Dado que cada entrada es un número natural, el orden anterior será único para cada subconjunto de 5 números naturales pudiendo estar algunos de ellos repetidos.

El problema se reduce entonces en determinar cuántos subconjuntos se pueden formar para un conjunto de 5 números y cuántos arreglos se pueden formar con cada uno de estos subconjuntos.

Sabemos que, dado un conjunto de 5 elementos, el número de subconjuntos con i elementos es igual a $\binom{5}{i}$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Consideremos ahora los siguientes casos:

- Para cada subconjunto de un elemento $\{a\}$ con $a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ fijo, solo se puede formar un arreglo (a, a, a, a, a).

- Para cada subconjunto de dos elementos $\{a, b\}$ con $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

donde $a > b$, se pueden formar 4 arreglos:

$$\begin{gathered}(a, b, b, b, b),\\(a, a, b, b, b),\\(a, a, a, b, b),\\(a, a, a, a, b).\end{gathered}$$

- Para cada subconjunto de tres elementos $\{a, b, c\}$ en donde $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, con $a > b > c$, entonces se pueden formar 6 arreglos:

$$\begin{gathered}(a, b, c, c, c),\\(a, b, b, c, c),\\(a, b, b, b, c),\\(a, a, b, c, c),\\(a, a, b, b, c),\\(a, a, a, b, c).\end{gathered}$$

- Para cada subconjunto de cuatro elementos $\{a, b, c, d\}$ con $a, b, c, d \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, donde $a > b > c > d$, entonces se pueden formar 4 arreglos:

$$\begin{gathered}(a, b, c, d, d),\\(a, b, c, c, d),\\(a, b, b, c, d),\\(a, a, b, c, d).\end{gathered}$$

- Finalmente, para el subconjunto de cinco elementos ocurre solo el caso $(5, 4, 3, 2, 1)$.

Así, el total de conjuntos de 5 pilas de cajas que pueden formarse con las condiciones del problema es igual a:

$$1\binom{5}{1} + 4\binom{5}{2} + 6\binom{5}{3} + 4\binom{5}{4} + 1\binom{5}{5} = 126.$$

Problema 14. (Problema B del Examen Estatal de la 23a. OMM Veracruz de 2009) Un número capicúa es aquel que se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda (por ejemplo 77, 12421, etc...). Si escribimos de manera consecutiva todos los números capicúa

$$123456789112233\ldots,$$

¿cuál es el dígito en la posición 2009?

Solución

Los números capicúas de hasta 5 cifras tienen la forma:

cifras	forma
1	a
2	aa
3	aba
4	$abba$
5	$abcba$

Es claro que $a \neq 0$, por lo que hay 9 capicúas de una cifra, 9 capicúas de 2 cifras, $9(10) = 90$ capicúas de 3 cifras, $9(10) = 90$ capicúas de 4 cifras y $9(10)(10) = 900$ capicúas de 5 cifras, por lo que la lista que se obtiene al escribir de manera consecutiva los capicúas hasta de 5 cifras tiene

$$9 + 9(2) + 90(3) + 90(4) + 900(5) = 5157$$

dígitos. Así, el capicúa buscado es de 5 cifras, ya que la suma de los capicúas de hasta 4 cifras es 657.

Analicemos los capicúas de 5 cifras.

forma	capicúas	total dígitos
$1bcb1$	100	500
$2bcb2$	100	500
$3bcb3$	100	500
$4bcb4$	100	500

Al sumar los dígitos de los capicúas de hasta 4 cifras con los de la forma $1bcb1$ y $2bcb2$, nos da $657 + 500 + 500 = 1657$, y al sumar bloque de capicúas de la forma $3bcb3$ nos da $1657 + 500 = 2157$. De esto, tenemos que el dígito que ocupa el lugar 2009 corresponde a un número de la forma $3bcb3$.

Los capicúas de la forma $30c03$, $31c13$, $\ldots$, $36c63$ agregan 50 dígitos cada uno, por lo que obtenemos $50(7) = 350$ dígitos más; es decir, hasta el capicúa 36963 llevamos $1657 + 350 = 2007$ dígitos. El siguiente capicúa es 37073, por lo que el dígito que ocupa el lugar 2009 es el número 7.

Problema 15. (Problema 2 del examen selectivo de la 19a. OMM Veracruz de 2005) Sean a, b y c enteros positivos tales que

$$\frac{a+b}{bc} = \frac{b+c}{ac} = \frac{a+c}{ab}.$$

Prueba que $a = b = c$.

Solución

Procedamos por contradicción. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a \leq b \leq c$ y que no ocurre $a = b = c$ al mismo tiempo, entonces tenemos los siguientes casos:

- $a \neq b$, es decir $a < b \leq c$, entonces se tiene que $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$, lo cual, como c es positivo, equivale a tener $\frac{1}{bc} < \frac{1}{ac}$. También se cumple que $a + b < b + c$, por lo tanto, se obtiene que

$$\frac{a+b}{bc} < \frac{b+c}{ac},$$

lo cual contradice la hipótesis del problema.

- $a = b < c$, entonces $\frac{1}{c} < \frac{1}{a}$, lo cual, dado que b es positivo, es equivalente a $\frac{1}{bc} < \frac{1}{ab}$. Como también se cumple que $a + b < a + c$, entonces

$$\frac{a+b}{bc} < \frac{a+c}{ab},$$

contradiciendo así la hipótesis del problema.

Por lo tanto, $a = b = c$.

Problema 16. (Problema 3 del Examen Estatal de la 1a. OMM Veracruz de 1987) Se tiene un tablero parecido al de ajedrez, pero de 15×15 en lugar de 8×8. Supongamos que los puntos que son esquinas de los cuadritos están coloreados de rojo, blanco o azul (tenemos entonces $16 \times 16 = 256$ puntos coloreados). Prueba que existe un rectángulo con dos lados verticales y dos horizontales, cuyos vértices son cuatro puntos del mismo color.

Solución 1

Denotemos por R, A y B los vértices de color rojo, azul y blanco, respectivamente; en total tenemos 16 vértices en cada una de las 16 filas. Por el Principio de Casillas, en una fila hay al menos 6 vértices de un mismo color, sin pérdida de generalidad supongamos R. Como hay 16 filas, entonces, nuevamente por el Principio de Casillas, hay al menos 6 filas que cumplen lo anterior; llamémoslas $f_1, f_2, \ldots, f_6$.

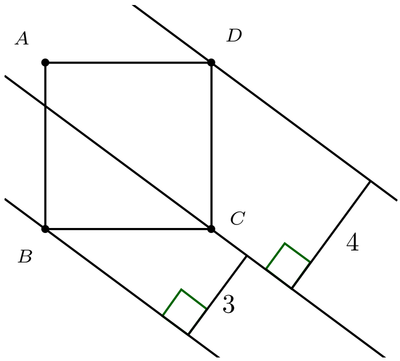
Sobre la fila f_1 pintemos 6 vértices con el color R. Si intentamos no formar un rectángulo como el que dice el problema, entonces en la fila f_2 debemos procurar que no haya dos vértices pintados del color R que se correspondan verticalmente con alguno de los ya pintados en la fila f_1. Así, el número de vértices que podemos elegir en f_2 para pintarlos con el color R es 11 (un vértice de f_2 si puede coincidir verticalmente con alguno de f_1). Habiendo pintado 6 vértices en f_2 y siguiendo la misma idea, de no permitir que dos vértices pintados de f_3 coincidan verticalmente con dos de f_1 o f_2 pero permitiendo que puedan coincidir con uno en cada fila, tenemos que el número de vértices que podemos elegir en f_3 es 7. Ahora, al pintar los 6 vértices en f_3 tenemos que solo queda un vértice que no se corresponde verticalmente con alguno ya pintado en las filas anteriores; así, al pintar 6 vértices en f_4 habrá dos vértices que se corresponderán con vértices de las filas f_1, f_2 o f_3 y que en consecuencia formarán un rectángulo cuyos vértices tienen el mismo color.

Solución 2

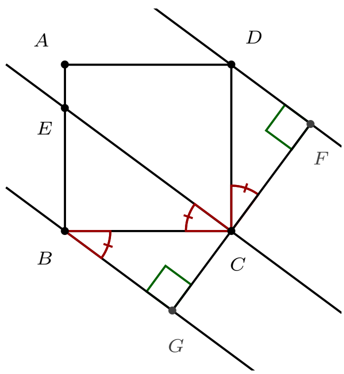
Al considerar una fila, por el Principio de Casillas, al menos 6 de los 16 vértices son de un mismo color. Diremos que una fila es de tipo R, B o A si estos vértices son de color rojo, blanco o azul, respectivamente; tenemos entonces 3 tipos de filas. Considerando las 16 filas, por el Principio de Casillas, al menos 6 de las 16 filas son del mismo tipo; supongamos sin pérdida de generalidad que este tipo es R.

Llamaremos S_N al conjunto de columnas que contienen los vértices de color R de la fila N, con $N = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Considerando las filas de tipo R, tenemos que los conjuntos S_1, S_2 y S_3 comparten por parejas, a lo más, una columna de manera que no se forme un rectángulo de vértices R, de aquí que la suma de las columnas de S_1, S_2 y S_3 es al menos 15. Considerando la cuarta fila de tipo R, por el Principio de Casillas, al menos dos de los vértices de color R coinciden en el mismo S_X (con $X = 1, 2$ o 3), donde estos 2 vértices en S_4 y los superiores a estos en S_X definen un rectángulo cuyos vértices son del mismo color.

Problema 17. Por los vértices B, C y D de un cuadrado $ABCD$ se trazan rectas paralelas, como en la figura, de tal manera que la recta que pasa por C se encuentra a una distancia de 3 de la recta que pasa por B y de 4 de la que pasa por D. Determina el valor de AC.



Solución
Sean ℓ_1, ℓ_2 y ℓ_3 las rectas paralelas que pasan por B, C y D, respectivamente. Sea E la intersección de AB con ℓ_2. Sean G y F puntos en las rectas ℓ_1 y ℓ_3, respectivamente, tales que EF es perpendicular a ellas y EF pasa por C.



Como $\measuredangle FCE = 90°$, entonces

$$\measuredangle FCD = 90° - \measuredangle DCE = \measuredangle ECB = \measuredangle CBG.$$

Además, como $\measuredangle BGC = 90^\circ = \measuredangle CFD$, entonces $\measuredangle BCG = \measuredangle CDF$. Y por ser $BC = CD$, utilizando el criterio ALA, tenemos que los triángulos $\triangle BGC$ y $\triangle CFD$ son congruentes. Se sigue que $BG = CF = 4$ y como $GC = 3$, utilizando el Teorema de Pitágoras, tenemos que

$$BC^2 = 3^2 + 4^2 = 25.$$

Por ser $AB = BC$, de nuevo por el Teorema de Pitágoras, concluimos que:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{25 + 25} = 5\sqrt{2}.$$

Problema 18. (Problema 28 del Examen Canguro de 2006) ¿Cuánto vale $a-b$ si $a = 1^2+2^2+3^2+\cdots+2014^2$ y $b = (1\times3)+(2\times4)+(3\times5)+\cdots+(2012\times2014)$?

Solución 1

Observemos que el n-ésimo término de b está dado por $n(n+2)$, entonces la suma de los 2012 términos se puede expresar como

$$b = \sum_{k=1}^{2012} k(k+2).$$

Análogamente a está dado por la suma

$$a = \sum_{k=1}^{2014} k^2.$$

De esta manera $a - b$ se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} a - b &= \sum_{k=1}^{2014} k^2 - \sum_{k=1}^{2012} k(k+2) \\ &= (2013)^2 + (2014)^2 - 2\sum_{k=1}^{2012} k \\ &= (2013)^2 + (2014)^2 - 2\left[\frac{(2012)(2013)}{2}\right] \\ &= (2013)^2 + (2014)^2 - (2012)(2013) \\ &= 2013 + (2014)^2. \end{aligned}$$

Solución 2

Observemos que sumando de b se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} b &= [(2-1)\times(2+1)] + [(3-1)\times(3+1)] + \cdots \\ &\quad +[(2013-1)\times(2013+1)] \\ &= [2^2-1] + [3^2-1] + \cdots + [2013^2-1] \\ &= 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + 2013^2 - 2012. \end{aligned}$$

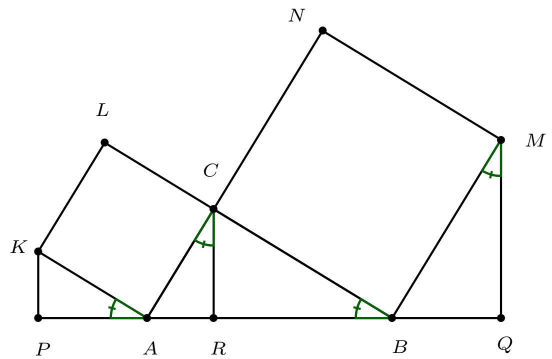
Por lo tanto, obtenemos que:

$$a - b = 1^2 + 2014^2 + 2012 = 2013 + 2014^2.$$

Problema 19. Sobre los catetos AC y BC del triángulo rectángulo $\triangle ABC$ se construyen exteriormente los cuadrados $AKLC$ y $BMNC$. Sean P y Q los pies de las perpendiculares a AB trazadas desde K y M, respectivamente. Prueba que $KP + MQ = AB$.

Solución 1

Sea R el pie de C en AB. Como CR es perpendicular a AB, entonces $\measuredangle ACR = 90° - \measuredangle CAB = \measuredangle ABC$ y, por ser ángulos correspondientes, $\measuredangle ABC = \measuredangle PAK$.



Por otro lado, $\measuredangle PAK + 90°$ es un ángulo exterior de $\triangle ACR$, de donde

$$\measuredangle PAK + 90° = 90° + \measuredangle ACR.$$

Por consiguiente, $\measuredangle PAK = \measuredangle ACR$ y, por lo tanto, $\measuredangle PKA = \measuredangle RAC$.

Como $AK = AC$, por el criterio de congruencia ALA, tenemos que

$$\triangle KPA \simeq \triangle ARC,$$

de donde se sigue que $KP = AR$.

De manera análoga podemos observar que

$$\triangle CRB \simeq \triangle BQM,$$

puesto que $\measuredangle RCB = \measuredangle QBM$, $CB = BM$ y $\measuredangle CBR = \measuredangle BMQ$, lo cual implica que $MQ = RB$.

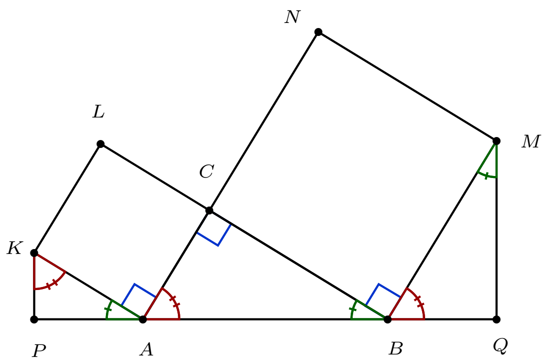
Concluimos que $KP + MQ = AR + RB = AB$, que es lo que queríamos probar.

Solución 2

Observemos que $\measuredangle PAK = \measuredangle ABC$ y $\measuredangle ACB = \measuredangle QBM$, por ser ángulos correspondientes. Luego, por el criterio AA, tenemos que

$$\triangle KPA \sim \triangle ACB,$$

de donde $\frac{PK}{AC} = \frac{AK}{AB}$ y como $AK = AC$, entonces $AC^2 = PK \cdot AB$.



De nuevo, por el criterio AA, tenemos que

$$\triangle BQM \sim \triangle ACB,$$

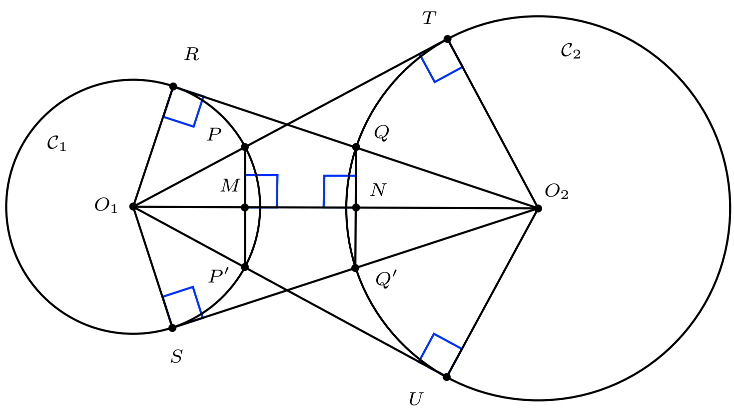
de donde $\frac{QM}{CB} = \frac{BM}{AB}$ y como $BM = CB$, entonces $BC^2 = QM \cdot AB$.
Al considerar que $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo, tenemos que

$$\begin{aligned} AB^2 &= AC^2 + CB^2 \\ &= PK \cdot AB + AB \cdot QM \\ &= AB(PK + QM). \end{aligned}$$

Como $AB \neq 0$, concluimos que $AB = PK + QM$.

Problema 20. (Problema 5 del Quinto Examen Estatal de la 18a. OMM San Luis Potosí de 2004) Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ circunferencias exteriores de centros O_1 y O_2, respectivamente. Se trazan por O_1 las dos tangentes a la circunferencia $\mathcal{C}_2$, que intersecan a $\mathcal{C}_1$ en P y P', y se trazan por O_2 las dos tangentes a la circunferencia $\mathcal{C}_1$, que intersecan a $\mathcal{C}_2$ en Q y Q'. Demuestra que $PP' = QQ'$.

Solución
Sean R, S, T y U los puntos de tangencia, como en la figura.



Observemos que los triángulos $\triangle O_1TO_2$ y $\triangle O_1UO_2$ son congruentes por el criterio LLL, por lo que tenemos que $\measuredangle O_2O_1P = \measuredangle O_2O_1P'$. Como $\triangle O_1PP'$ es isósceles con $O_1P = O_1P'$, entonces PP' y O_1O_2 son perpendiculares. Análogamente, tenemos que QQ' y O_1O_2 son perpendiculares.

Sean M y N los puntos de intersección de PP' y QQ' con O_1O_2, respectivamente. Luego, como $\triangle PO_1M$ y $\triangle O_2O_1T$ comparten el ángulo $\measuredangle TO_1O_2$ y ambos triángulos tienen un ángulo de $90°$, entonces $\triangle PO_1M \sim \triangle O_2O_1T$. De donde

$$PM = \frac{O_1P \cdot O_2T}{O_1O_2}.$$

De manera semejante podemos expresar el valor de QN como:

$$QN = \frac{O_1R \cdot O_2Q}{O_1O_2}.$$

Además, por ser radios, $O_1P = O_1R$ y $O_2T = O_2Q$, de esta forma tenemos que $PM = QN$. Y como $\triangle O_1PP'$ y $\triangle O_2QQ'$ son isósceles, entonces M y N son puntos medios. Por lo tanto,

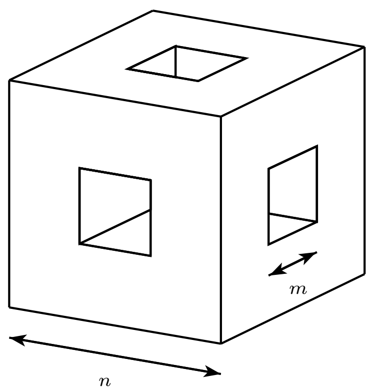
$$\frac{PP'}{2} = PM = QN = \frac{QQ'}{2},$$

es decir, $PP' = QQ'$.

Problema 21. (Problema 1 del Examen Estatal de la 5a. OMM Veracruz de 1991) A un dado de madera de forma perfectamente cúbica y de n centímetros de arista se le practican tres orificios mutuamente perpendiculares que lo atraviesan completamente de lado a lado, siendo cada orificio de sección cuadrada, esto es, en forma de un prisma cuadrado con caras paralelas a las caras del cubo.

Los extremos de estos tres orificios o túneles que atraviesan el cubo son seis cuadrados iguales, cada uno sobre una de las distintas caras del cubo, con lados paralelos a las aristas del mismo y con el mismo centro con la cara correspondiente, como se muestra en la figura. Cada uno de estos seis cuadrados mide m centímetros de lado.

Encuentra el área y el volumen del sólido tridimensional que resulta.

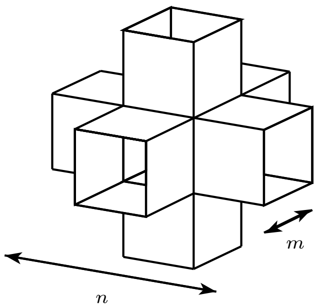


Observación. Aquí el "área" no significa solo el área externa al cubo original, sino la superficie total de contacto entre el aire y la madera del dado perforado.

Solución

Denotemos por A al área de la figura, la cual dividiremos en el área que hay en cada cara y el área determinada por los túneles, a las cuales llamaremos área exterior A_e e interior A_i, respectivamente. Las caras del cubo miden n y tienen una perforación de forma cuadrada cuya arista mide m, así, el área de cada cara será el área del cuadrado mayor menos el área del cuadrado pequeño y dado que tenemos 6 caras, entonces $A_e = 6(n^2 - m^2)$.

Notemos que cada agujero tiene la forma de un prisma rectangular de lado $m \times n$ y base cuadrada de lado m, los cuales se intersecan en un cubo de lado m.



Esta intersección nos genera 6 prismas de lados $\frac{n-m}{2} \times m$. Como estamos interesados en hallar el área interior, solo contaremos la de las 4 caras que están en contacto con el aire, así $A_i = 6\left[4\left(\frac{n-m}{2} \cdot m\right)\right] = 12(nm - m^2)$. Finalmente, tenemos que el área total de la figura es:

$$A = A_e + A_i = 6n^2 - 18m^2 + 12nm.$$

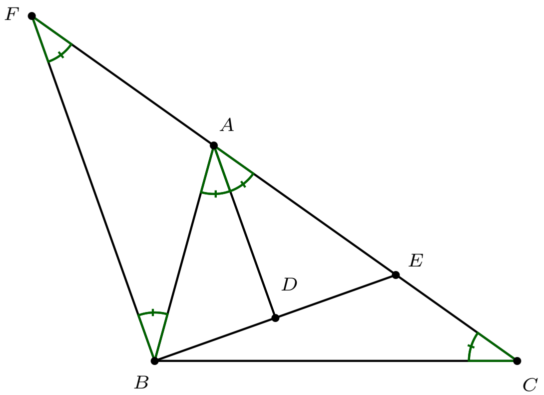
Denotemos por V al volumen de la figura, observemos que este es igual al volumen total del cubo menos el volumen de la parte perforada. El volumen del cubo es n^3. El volumen de la parte perforada corresponde al volumen de los tres prismas rectangulares ($3m^2n$), menos dos veces el volumen del cubo en el que se intersecan ($2m^3$), de lo contrario este volumen se cuenta tres veces. Así, el volumen total es:

$$V = n^3 - (3m^2n - 2m^3).$$

Problema 22. Sea $\triangle ABC$ un triángulo tal que $\measuredangle BAC = 70°$ y $\measuredangle BCA = 35°$. Si D es un punto en la bisectriz de $\measuredangle BAC$ tal que $BC = 2AD$, determina el valor de $\measuredangle DBC$.

Solución 1

Sea E la intersección de BD con AC y F la intersección de AC con la recta paralela a AD que pasa por B.



Tenemos la siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\measuredangle BFC &= \measuredangle DAE = 35^\circ = \measuredangle BCF,\\ \measuredangle ABF &= \measuredangle DAB = 35^\circ,\end{aligned}$$

de esta manera $\triangle BFC$ es isósceles. Se sigue que

$$2AD = BC = BF.$$

Por otro lado, utilizando el criterio AA, tenemos que los triángulos $\triangle ADE$ y $\triangle FBE$ son semejantes, de donde

$$\frac{DE}{BE} = \frac{AD}{BF} = \frac{1}{2}.$$

Lo cual implica que

$$DE = \frac{1}{2}(BD + DE),$$

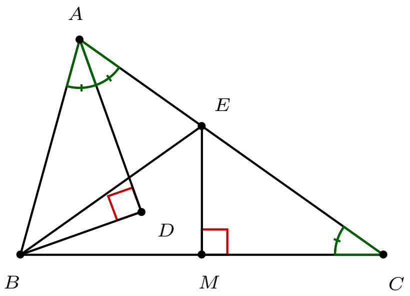
por lo tanto $BD = DE$. De esta manera AD es bisectriz y mediana de $\triangle ABE$, por lo que este último es isósceles. Luego $\measuredangle ABE = \measuredangle AEB = 55^\circ$.

Concluimos que

$$\begin{aligned}\measuredangle DBC &= 180^\circ - \measuredangle BFC - \measuredangle BCA - \measuredangle ABF - \measuredangle ABE\\ &= 180^\circ - 35^\circ - 35^\circ - 35^\circ - 55^\circ\\ &= 20^\circ.\end{aligned}$$

Solución 2

Sea E un punto en AC tal que $AB = BE$, por lo que $\measuredangle AEB = 70^\circ$; de donde se sigue que $\measuredangle BEC = 110^\circ$. Luego $\measuredangle EBC = 35^\circ$, lo cual implica que $\triangle BCE$ es isósceles con $BE = EC$.



Sea M el punto medio de BC. Como $MC = AD$ por hipótesis y $AB = BE = EC$, por el criterio LAL tenemos que $\triangle ABD$ y $\triangle CEM$ son congruentes. Como $\triangle BCE$ es isósceles, la mediana EM también es altura. De esta manera,

$$\measuredangle ADB = \measuredangle CME = 90°.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \measuredangle ABD &= 180° - \measuredangle BAD - \measuredangle ADB \\ &= 180° - 35° - 90° \\ &= 55°. \end{aligned}$$

Finalmente, obtenemos el valor del ángulo:

$$\begin{aligned} \measuredangle DBC &= 180° - \measuredangle BCA \measuredangle BAC - \measuredangle ABD \\ &= 180° - 35° - 70° - 55° \\ &= 20°. \end{aligned}$$

Problema 23. (Problema A del Examen Estatal de la 15a. OMM Veracruz de 2001) Encuentra todos los números menores que 1000 que son iguales al triple de la suma de sus cifras.

Solución
Sea $n = abc$ con a, b y c dígitos. Queremos

$$100a + 10b + c = 3(a + b + c).$$

Observemos que el número más pequeño es 0 y el más grande es 999, entonces el número n debe cumplir $3(0 + 0 + 0) = 0 \leq n \leq 81 = 3(9 + 9 + 9)$, es decir, n es un número de a lo más dos cifras (por lo que $a = 0$). Tenemos los siguientes casos:

1. Si n es de una cifra, se tiene que cumplir $3c = c$, por lo tanto $c = 0$ y entonces el número buscado es $n = 0$.

2. Si n es de dos cifras, se tiene que cumplir lo siguiente:

$$\begin{aligned} 3(b + c) &= 10b + c \\ 2c &= 7b \\ b &= \frac{2}{7}c. \end{aligned}$$

Como b y c son dígitos, tenemos dos opciones:

- Si $c = 7$, entonces $b = 2$, así, el número buscado es $n = 27$.
- Si $c = 0$, entonces $b = 0$, lo cual nos conduce al caso 1.

Concluimos que los números menores que 1000 que satisfacen las condiciones del problema son 27 y 0.

Problema 24. (Problema 3 del Examen Final de la Categoría B, de las XXX Olimpiadas Portuguesas de Matemáticas de 2012) Helena y Luis jugarán un partido con dos bolsas de canicas. Ellos juegan alternadamente y cada jugada consiste de alguno en los siguientes movimientos:

- Retirar una canica de una de las bolsas.
- Retirar una canica de ambas bolsas.
- Mover una canica de una bolsa a otra.

Gana quien deja ambas bolsas vacías.

Antes de comenzar a jugar, Helena contó las canicas de cada bolsa y le dijo a Luis: “puedes comenzar tú”, mientras piensa: “si él comienza seguro voy a ganar”.

¿De qué manera podrían estar las canicas distribuidas en las bolsas para que lo que piensa Helena sea cierto?

Solución

Sea PP la situación en la que en ambas bolsas hay un número par de canicas, PI cuando en una bolsa hay un número par de canicas y un número impar en la otra bolsa y, finalmente, II es la situación cuando en ambas bolsas hay un número impar de canicas.

Si inicialmente se tiene la situación PP, después de que Luis realice su jugada necesariamente se obtiene: PI o II. En cada caso, Helena puede regresar a la situación PP, disminuyendo, además, el número total de canicas en cada bolsa. De esta manera, Helena eventualemente podrá dejar ambas bolsas vacías ganando de esta forma el juego.

Si inicialmente se tiene la situación PI o II, entonces Luis puede retirar una canica de una de las bolsas para obtener la situación PP y, por lo tanto, ganar la partida.

Problema 25. (Problema D del Examen Estatal de la 14a. OMM Veracruz de 2000) Dados tres números enteros positivos se pueden realizar seis diferentes cocientes con ellos. Encuentra todas las ternas de números enteros positivos consecutivos, tales que la suma de los seis posibles cocientes sea un entero.

Solución

Sean a, b, c números consecutivos y

$$n = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}.$$

Si $a = x-1, b = x$ y $c = x+1$ con $x \in \mathbb{Z}$, entonces el valor de n se puede expresar como:

$$n = \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} + \frac{x+1}{x} + \frac{x}{x-1} = 6 + \frac{6}{x^2-1}.$$

Como queremos que n sea entero, entonces x^2-1 debe dividir a 6 y además $x^2 - 1 \leq 6$.

Como $x \geq 2$, entonces x^2-1 crece cuando x crece, y va tomando los valores siguientes: para $x = 2$, $x^2-1 = 3$; para $x = 3$, $x^2-1 = 8$. Para este último caso $x^2-1 = 8 > 6$, por lo que no se cumplirían las condiciones dadas. Por lo tanto, la única solución es $x = 2$, es decir, la terna dada por $a = 1, b = 2$ y $c = 3$.

Problema 26. (Modificación del Problema 4 de la XXXVII Olimpiada Matemática Española Fase Nacional 2001) Los números enteros del 1 al 9 fueron distribuidos en las casillas de una tabla de 3×3. Después se sumaron seis números de tres dígitos: los tres que se leen en las tres filas de izquierda a derecha y los tres que se leen en las columnas de arriba a abajo. ¿Hay alguna distribución para la cual el valor de esta suma sea 2014?

Solución 1

Sea $(a_1, a_2, \ldots, a_9)$ alguna permutación de $(1, 2, 3, \ldots, 9)$. Supongamos que la cuadrícula fue llenada como se muestra en la tabla y que este acomodo garantiza que la suma de los 6 números de 3 dígitos sea igual a 2014.

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9

Entonces, de acuerdo a las condiciones del problema, tenemos que

$$\begin{aligned}
2014 &= a_1a_2a_3 + a_4a_5a_6 + a_7a_8a_9 + a_1a_4a_7 + a_2a_5a_8 + a_3a_6a_9 \\
&= (100a_1 + 10a_2 + a_3) + \cdots + (100a_3 + 10a_6 + a_9) \\
&= 100(2a_1 + a_4 + a_7 + a_2 + a_3) + 10(a_2 + 2a_5 + a_8 + a_4 + a_6) \\
&\quad +(a_3 + a_6 + 2a_9 + a_7 + a_8) \\
&= 99(2a_1 + a_4 + a_7 + a_2 + a_3) + 9(a_2 + 2a_5 + a_8 + a_4 + a_6) \\
&\quad +2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9) \\
&= 99(2a_1 + a_4 + a_7 + a_2 + a_3) + 9(a_2 + 2a_5 + a_8 + a_4 + a_6) + 2(45),
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a que $\sum_{i=1}^{9} a_i = \sum_{k=1}^{9} k = 45$. Dado que 9 divide a cada uno de los términos de la suma, deberíamos tener que 9 divide a 2014, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, no es posible tener una distribución de los enteros del 1 al 9 que cumpla con las condiciones del problema.

Solución 2

Denotemos cada una de las casillas del tablero con las letras a, b, c, d, e, f, g, h e i como se ve en la siguiente tabla:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

En ella, cada letra representa alguno de los enteros del 1 al 9. De acuerdo a las condiciones del problema se cumple que

$$abc + def + ghi + adg + beh + cfi = 2014.$$

Tenemos entonces las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} c + f + g + h + 2i &= 10k + 4, \\ b + h + d + f + 2e + k &= 10m + 1, \\ b + g + d + c + 2a + m &= 20. \end{aligned}$$

Al despejar m de la tercera ecuación y sustituirla en la segunda, obtenemos

$$20a + 11b + 10c + 11d + 2e + f + 10g + h + k = 201.$$

Al despejar k de esta y sustituirla en la primera de las ecuaciones anteriores obtenemos la relación siguiente:

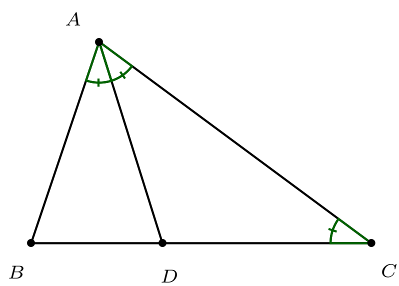
$$\begin{aligned} 2014 &= 200a + 110b + 101c + 110d + 20e + 11f + 101g + 11h + 2i \\ &= 198a + 108b + 99c + 108d + 18e + 9f + 99g + 9h \\ &\quad +2(a + b + c + d + e + f + g + h + i) \\ &= 198a + 108b + 99c + 108d + 18e + 9f + 99g + 9h + 2(45). \end{aligned}$$

Por el mismo argumento que en la Solución 1, no es posible tener una distribución de los enteros del 1 al 9 que cumpla con las condiciones del problema.

Problema 27. (Problema 2 del Examen Final de la Categoría B de las XXX Olimpiadas Portuguesas de Matemáticas de 2012) Considera un triángulo $\triangle ABC$ y D un punto en el segmento BC, de tal forma que AD es la bisectriz de $\measuredangle BAC$ y $\triangle ACD$ es isósceles con $AD = DC$. ¿Cuál es el menor perímetro que puede tener $\triangle ABC$, considerando que las longitudes de los lados de los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ACD$ son números enteros?

Solución

Sean $a = AC$, $b = AD = DC$, $c = BD$ y $d = AB$ números enteros.



Como AD es bisectriz de $\measuredangle BAC$ y $\triangle ADC$ es isósceles con $AD = DC$, entonces

$$\measuredangle BAD = \measuredangle DAC = \measuredangle BCA.$$

De esta forma, utilizando el criterio AA, tenemos que $\triangle ABC$ y $\triangle DBA$ son semejantes, de donde

$$\frac{d}{c} = \frac{b+c}{d} = \frac{a}{b}.$$

Si k es el máximo común divisor de b y c, entonces $b = kx$ y $c = ky$ con $(x, y) = 1$. Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned} d^2 &= c(b+c) = k^2y(x+y), \\ a^2 &= \frac{b^2d^2}{c^2} = \frac{k^2x^2k^2y(x+y)}{k^2y^2} = \frac{k^2x^2(x+y)}{y}. \end{aligned}$$

Como $(x, y) = 1$ y a es un entero, entonces y divide a k^2. Por otro lado, si k y a tuvieran algún factor en común, entonces al dividir a, b, c y d por dicho factor obtendríamos un triángulo de menor perímetro, con las condiciones que indica el problema. De esta manera podemos suponer que $(k, a) = 1$, lo cual implica que k^2 divide a y. Por lo tanto

$$y = k^2,$$

de donde obtenemos las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} c &= k^3, \\ d^2 &= k^4(x+k^2), \\ a^2 &= x^2(x+k^2). \end{aligned}$$

Por la Desigualdad del Triángulo tenemos que $a < 2b$. Luego, elevando al cuadrado, se sigue que $x^2(x+k^2) < 4k^2x^2$, de donde $x < 3k^2$.

Analizando por casos para k, tenemos:

- Si $k = 1$, entonces $x < 3$ y además $d^2 = x + 1$ lo cual no es posible.
- Si $k = 2$, entonces $a^2 = x^2(x+4)$, $b = 2x$, $c = 8$, $d^2 = 16(x+4)$ con $x < 12$. Entonces, el único caso en el que a es entero ocurre cuando $x = 5$ y, de esta manera, $a = 15$, $b = 10$, $c = 8$ y $d = 12$. En este caso el perímetro de $\triangle ABC$ es

$$15 + 10 + 8 + 12 = 45.$$

- Si $k \geq 3$, entonces $d > c > 27$, por lo que el perímetro de $\triangle ABC$ es mayor que 54.

Concluimos que el menor perímetro que puede tener $\triangle ABC$ es 45.

Problema 28. (Problema 4 de la Segunda Fase Nivel 3-A de la Olimpiada Brasileña de Matemáticas de 2012) Los dos menores números primos de la forma $n^2 + 5$ son $6^2 + 5 = 41$ y $12^2 + 5 = 149$. ¿Cuál es el tercer menor número primo de esa forma?

Solución
Primero notemos que si n es impar, entonces $n^2 + 5$ es par y mayor que 2, es decir, no es primo. Por lo tanto, n debe ser par. Además, si $n = 3k \pm 1$, entonces

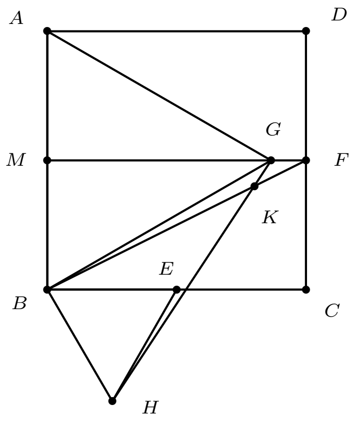
$$n^2 + 5 = 9k^2 \pm 6k + 6$$

es múltiplo de 3 y mayor que 3, es decir, no es primo. De donde n es múltiplo de 3 y, por tanto, es múltiplo de 6.

Así, los próximos candidatos a primos son $18^2 + 5$ y $24^2 + 5$ pero ambos son múltiplos de 7. El número $30^2 + 5$ es múltiplo de 5. El próximo número a probar es $36^2 + 5 = 1301$, el cual es, en efecto, un número primo, esto lo podemos verificar revisando si es divisible por los primos hasta 36.

Problema 29. (Problema 3 de la Segunda Fase Nivel 3-B de la Olimpiada Brasileña de Matemáticas de 2012) Sean $ABCD$ un cuadrado, E el punto medio del lado BC y F el punto medio del lado CD. Se construyen los triángulos equiláteros $\triangle ABG$ y $\triangle BEH$ de forma que G esté en el interior del cuadrado y H en el exterior. Determina el ángulo agudo entre las rectas BF y GH.

Solución
Sea M el punto medio de AB.



Notemos que

$$\begin{aligned}
\measuredangle GBH &= \measuredangle GBE + \measuredangle EBH \\
&= (90^\circ - \measuredangle GBA) + 60^\circ \\
&= (90^\circ - 60^\circ) + 60^\circ \\
&= 90^\circ
\end{aligned}$$

y también que $BG = AB = 2MB$. Además, en $\triangle BMF$, $\measuredangle BMF = 90^\circ$ y $MF = 2BE = 2MB$. Luego, por el criterio LAL, $\triangle GBH$ y $\triangle FMB$ son congruentes. Por lo tanto, si $\alpha = \measuredangle BGH$, entonces $\measuredangle FBC = \measuredangle BFM = \measuredangle BGH =$

α. Luego, $\measuredangle GBF = 30° - \alpha$. Si K es la interesección de GH con BF, tenemos que

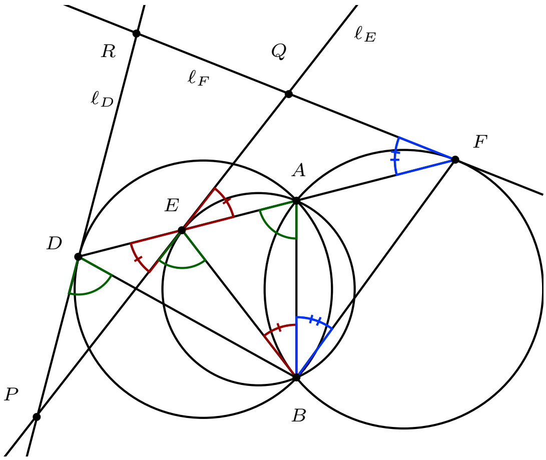
$$\begin{aligned}\measuredangle BKH &= \measuredangle BGH + \measuredangle GBF\\ &= \alpha + 30° - \alpha\\ &= 30°.\end{aligned}$$

Problema 30. Supongamos que tres circunferencias se intersecan en dos puntos A y B. Una recta que pasa por A corta a las circunferencias en los puntos D, E y F. Sean ℓ_D, ℓ_E y ℓ_F las rectas tangentes en los puntos D, E y F, respectivamente. Si ℓ_D y ℓ_E se cortan en P, ℓ_E y ℓ_F se cortan en Q, ℓ_F y ℓ_D se cortan en R, demuestra que $PBQR$ es un cuadrilátero cíclico.

Solución

Como ℓ_D y ℓ_F son rectas tangentes, entonces

$$\begin{aligned}\measuredangle RDA &= \measuredangle ABD,\\ \measuredangle RFA &= \measuredangle ABF.\end{aligned}$$



Al considerar la suma de los ángulos internos de $\triangle DFR$ tenemos:

$$\begin{aligned}\measuredangle DRF + \measuredangle DBF &= \measuredangle DRF + \measuredangle ABD + \measuredangle ABF\\ &= \measuredangle DRF + \measuredangle RDA + \measuredangle RFA\\ &= 180°.\end{aligned}$$

Luego, $BFRD$ es cíclico.

Por otro lado, al ser ℓ_D y ℓ_E tangentes, tenemos

$$\begin{aligned}\measuredangle PDB &= \measuredangle DAB\\ &= \measuredangle PEB.\end{aligned}$$

Luego, $BEDP$ es cíclico.

Finalmente, considerando que los cuadriláteros $BFRD$ y $BEDP$ son cíclicos, tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \measuredangle BPQ &= \measuredangle BDE \\ &= \measuredangle BDF \\ &= \measuredangle BRF \\ &= \measuredangle BRQ. \end{aligned}$$

Concluimos que $PBQR$ es un cuadrilátero cíclico.

Problema 31. (Problema C del examen selectivo de la 20a. OMM Veracruz de 2006) Considera los coeficientes binomiales

$$\binom{n}{k},$$

con $n \leq 30$. ¿Cuántos de ellos son impares?

Solución

Por el Binomio de Newton tenemos que

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}.$$

Estos elementos aparecen en los renglones del Triángulo de Pascal de la siguiente manera:

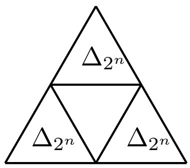
$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & & & \\ & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Lo que nos interesa es la paridad de cada uno de los números del Triángulo de Pascal, por lo que pondremos 0 si el número es par y 1 si es impar:

1
1 1
1 0 1
1 1 1 1
1 0 0 0 1
1 1 0 0 1 1
1 0 1 0 1 0 1
1 1 1 1 1 1 1 1
1 0 0 0 0 0 0 0 1
1 1 0 0 0 0 0 0 1 1
1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1
1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1

A este triángulo le denominaremos el Triángulo de Pascal binario. Denotemos por Δ_k al Triángulo de Pascal binario, desarrollado hasta la k-ésima fila y $o(\Delta_k)$ el número de coeficientes impares en Δ_k. Demostraremos que $o(\Delta_{2^n}) = 3o\left(\Delta_{2^{n-1}}\right)$ y que la última fila de Δ_{2^n} no contiene ceros, lo haremos por inducción.

Para $n = 1$ es claro que $o(\Delta_{2^1}) = 3$, mientras que $o(\Delta_{2^0}) = 1$ y, además, Δ_{2^1} no tiene ceros en su última fila, así se cumple para $n = 1$. Supongamos ahora que se cumple para $n = k$, demostraremos que se vale para $n = k + 1$, ya que la última fila de Δ_{2^n} no tiene ceros, la fila $2^n + 1$-ésima contiene solo el primer y el último elemento el número 1, el resto son 0. Así que a partir de esta fila se empiezan a construir dos triángulos idénticos a Δ_{2^n}, con raíz en cada uno de los extremos, tal como se muestra en la siguiente figura:



Cabe mencionar que el triángulo de enmedio es de solamente ceros, y de este modo el triángulo $\Delta_{2^{n+1}}$ contiene su última fila de puros 1 y, además, $o(\Delta_{2^{n+1}}) = 3o(\Delta_{2^n})$.

En nuestro caso, estamos hablando del triángulo Δ_{31}; notemos que

$$o(\Delta_{32}) = 3o(\Delta_{16}) = \cdots = 3^5 = 243.$$

Solo le quitaremos la última fila de 1, por lo que

$$o(\Delta_{31}) = 243 - 32 = 211.$$

Problema 32. (Problema 6 del Examen Nacional de la 11a. OMM de 1997) Prueba que el número 1 se puede escribir de una infinidad de maneras distintas en la forma

$$1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n},$$

donde n y $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son enteros positivos y $5 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.

Solución

Observemos que si n es cualquier natural, entonces

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Si usamos esta igualdad en $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ obtenemos que $1 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)$. Si ahora sustituimos $\frac{1}{2}$ por $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$ por $\frac{1}{4} + \frac{1}{12}$ y $\frac{1}{6}$ por $\frac{1}{7} + \frac{1}{42}$ obtenemos una nueva expresión para 1 en la que los denominadores son más grandes que en la expresión anterior. Si repetimos este procedimiento dos veces más podemos obtener una expresión en la que el denominador más chico es 5 y no hay denominadores repetidos; en efecto:

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\\
&= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)\\
&= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{42}\right)\\
&= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{42}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{20}\right) + \left(\frac{1}{13} + \frac{1}{156}\right)\\
&\quad + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{56}\right) + \left(\frac{1}{43} + \frac{1}{1806}\right)\\
&= \left(\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{20}\right) + \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{42}\right) + \left(\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{30}\right) + \left(\frac{1}{21} + \frac{1}{420}\right)\right)\\
&\quad + \left(\frac{1}{13} + \frac{1}{156}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{56}\right) + \left(\frac{1}{43} + \frac{1}{1806}\right).
\end{aligned}$$

Si reordenamos los términos en la última igualdad obtenemos una expresión como la solicitada por el problema. Para probar que hay una infinidad de estas vemos que al usar este procedimiento en el término con el denominador mayor nos lleva a obtener denominadores aún mayores, y esto lo podemos hacer una infinidad de veces.

Problema 33. Demuestra que $2 + 4 + \cdots + 2010$ es divisor de

$$2^{2011} + 4^{2011} + \cdots + 2010^{2011}.$$

Solución 1

Primero calculemos la siguiente suma:

$$2 + 4 + \cdots + 2010 = 2(1 + 2 + \cdots + 1005) = (1005)(1006).$$

Ya que 1005 y 1006 son primos relativos, basta demostrar que tanto 1005 como 1006 son divisores de $2^{2011} + 4^{2011} + \cdots + 2010^{2011}$.

Ahora notemos que

$$\begin{aligned}2^{2011}+&4^{2011}+\cdots+2010^{2011}\\&=2^{2011}\left(1^{2011}+2^{2011}+\cdots+1005^{2011}\right)\\&=2^{2011}(1^{2011}+1004^{2011})+\cdots+2^{2011}(502^{2011}+503^{2011})\\&\quad+2^{2011}(1005^{2011}).\end{aligned}$$

Recordemos que si a y b son enteros positivos y si n es un número impar positivo, entonces $a+b$ divide a a^n+b^n. Con esta observación tenemos que $1+1004$ divide a $1^{2011}+1004^{2011}$ y, así, sucesivamente, hasta llegar a que $502+503$ divide a $502^{2011}+503^{2011}$. Por lo tanto, 1005 divide a $2^{2011}+4^{2011}+\cdots+2010^{2011}$.

Utilizando el argumento anterior vemos que 1006 divide a la suma

$$\begin{aligned}2^{2011}+&4^{2011}+\cdots+2010^{2011}\\&=(2^{2011}+2010^{2011})+(4^{2011}+2008^{2011})+\cdots\\&\quad+(1004^{2011}+1008^{2011})+1006^{2011}\\&=2^{2011}(1^{2011}+1005^{2011})+\cdots\\&\quad+2^{2011}(502^{2011}+504^{2011})+1006^{2011},\end{aligned}$$

que era lo que faltaba.

Solución 2

Notemos que $2+4+\cdots+2010=(1005)(1006)$ y que $2^{2011}+\cdots+2010^{2011}=2^{2011}(1^{2011}+\cdots+1005^{2011})$. Dado que 1005 y 1006 son primos relativos, basta probar que tanto 1005 como 1006 son divisores de $2^{2011}(1^{2011}+\cdots+1005^{2011})$.

Ahora, por el Binomio de Newton, se tiene

$$\begin{aligned}1004^{2011}&=(1005-1)^{2011}\\&=\binom{2011}{0}1005^{2011}(-1)^0+\binom{2011}{1}1005^{2010}(-1)^1+\cdots\\&\quad+\binom{2011}{2011}1005^0(-1)^{2011},\end{aligned}$$

es decir,

$$1004^{2011}\equiv-(1)^{2011}\pmod{1005}.$$

De manera análoga, se tienen las siguientes congruencias:

$$\begin{aligned}1004^{2011}&\equiv-(1)^{2011}\pmod{1005},\\1003^{2011}&\equiv-(2)^{2011}\pmod{1005},\\&\vdots\\503^{2011}&\equiv-(502)^{2011}\pmod{1005}.\end{aligned}$$

Al sumar estas congruencias y agrupando, obtenemos

$$1^{2011} + 2^{2011} + \cdots + 1004^{2011} + 1005^{2011} \equiv 0 \pmod{1005}.$$

Con esto tenemos que 1005 divide a $2^{2011}(1^{2011} + \cdots + 1005^{2011})$.

Análogamente, tenemos

$$\begin{aligned}
1005^{2011} &\equiv -(1)^{2011} \pmod{1006},\\
1004^{2011} &\equiv -(2)^{2011} \pmod{1006},\\
&\vdots\\
504^{2011} &\equiv -(502)^{2011} \pmod{1006}.
\end{aligned}$$

Al sumar estas congruencias, obtenemos

$$1^{2011} + \cdots + 502^{2011} + 504^{2011} + \cdots + 1004^{2011} + 1005^{2011} \equiv 0 \pmod{1006}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
&2^{2011} + \cdots + 2010^{2011}\\
&\quad \equiv 2^{2011} + \cdots + 1004^{2011} + 1006^{2011} + 1008^{2011} + \cdots + 2010^{2011}\\
&\quad \equiv 2^{2011}(1^{2011} + \cdots + 502^{2011} + 504^{2011} + \cdots + 1004^{2011} + 1005^{2011})\\
&\qquad + 1006^{2011}\\
&\quad \equiv 2^{2011}(0) + 0 \pmod{1006},
\end{aligned}$$

es decir, 1006 divide a $2^{2011}(1^{2011} + \cdots + 1005^{2011})$, que era lo que faltaba.

Problema 34. La suma de cuadrículas del mismo tamaño, con números escritos en sus casillas, se efectúa casilla por casilla, por ejemplo:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2\\ \hline 3 & 4\\ \hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0\\ \hline 0 & 1\\ \hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 0\\ \hline 3 & 0\\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline 4 & 2\\ \hline 6 & 5\\ \hline\end{array}$$

Dado un entero positivo n, diremos que una cuadrícula es n-balanceada si tiene números enteros escritos en sus casillas y si la diferencia entre los números, escritos en cualesquiera dos casillas que comparten un lado, es menor o igual que n.

1. Muestra que toda cuadrícula $2n$-balanceada (de cualquier tamaño) se puede escribir como suma de 2 cuadrículas n-balanceadas.

2. Muestra que toda cuadrícula $3n$-balanceada (de cualquier tamaño) se puede escribir como suma de 3 cuadrículas n-balanceadas.

Solución

1. Sea A una cuadrícula $2n$-balanceada. Denotaremos por a_{ij} al elemento de la i-ésima fila y j-ésima columna de A. Definamos dos cuadrículas B y C con las mismas dimensiones que A, donde los elementos de B y C se construyen como sigue: si $a_{ij} = 2k$, entonces $b_{ij} = c_{ij} = k$, y si $a_{ij} = 2k+1$, entonces $b_{ij} = k$ y $c_{ij} = k+1$; en el primer caso deducimos que $k \leq n$ y en el segundo que $k+1 \leq n$.

   Ahora, supongamos que $a_{ij} - a_{st} \leq 2n$ y, sin pérdida de generalidad, que $a_{ij} \geq a_{st}$.

   Caso 1: Cuando a_{ij} y a_{st} son pares, $b_{ij} - b_{st} = c_{ij} - c_{st} = n$.

   Caso 2: Cuando $a_{ij} = 2k+1$ y $a_{st} = 2l+1$ con k y l enteros, $a_{ij} - a_{st} = 2(k-l) \leq n$. De aquí tenemos que $b_{ij} - b_{st} = c_{ij} - c_{st} = k - l \leq n$.

   Caso 3: Cuando $a_{ij} = 2k+1$ y $a_{st} = 2l$, la hipótesis nos dice que $a_{ij} - a_{st} = 2k+1-2l \leq 2n$, de aquí $2(k-l)+1 \leq 2(k-l)+2 \leq 2n$, por lo que $(k-l)+1 \leq n$. Así, tenemos que $b_{ij} - b_{st} = k - l \leq n$ y $c_{ij} - c_{st} = k+1-l \leq n$.

   Caso 4: Cuando $a_{ij} = 2k$ y $a_{st} = 2l+1$, la hipótesis nos dice $2k-2l-1 \leq 2n$, lo cual implica que $2(k-l) \leq 2n$. Así, $b_{ij} - b_{st} = k - l \leq n$ y $c_{ij} - c_{st} = k-l-1 \leq n$.

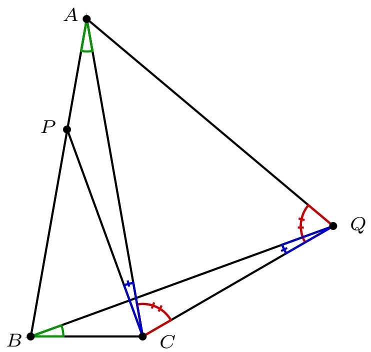
   Por lo tanto, B y C son n-balanceados y $A = B + C$.

2. Análogamente, supongamos que A es $3n$-balanceado. Definamos tres cuadrículas B, C y D de la siguiente manera: si $a_{ij} = 3k$, con k un entero no negativo, entonces $b_{ij} = c_{ij} = d_{ij} = k$; si $a_{ij} = 3k+1$, entonces $b_{ij} = c_{ij} = k$ y $d_{ij} = k+1$; finalmente, si $a_{ij} = 3k+2$, sean $b_{ij} = k$ y $c_{ij} = d_{ij} = k+1$.

   Con esto tenemos que $A = B+C+D$ y que B, C y D son n-balanceados.

Problema 35. En un triángulo $\triangle ABC$ se tiene que $\measuredangle ABC = \measuredangle ACB = 80°$. Sea P un punto en el segmento AB tal que $\measuredangle BPC = 30°$. Demuestra que $AP = BC$.

Solución
Construyamos el triángulo equilátero $\triangle ABQ$, de tal manera que Q esté del mismo lado que C respecto a la recta AB.



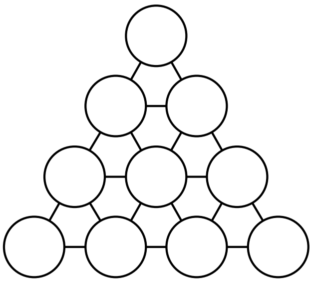
Como $AB = AC$ (ya que $\measuredangle ABC = \measuredangle ACB = 80°$) tenemos que $AC = AQ$, de modo que $\triangle ACQ$ es isósceles. Como $\measuredangle CAQ = 40°$, entonces $\measuredangle ACQ = \measuredangle AQC = 70°$. Similarmente, como $\measuredangle ABQ = 60°$, tenemos que

$$\measuredangle CBQ = 20° = \measuredangle BAC,$$

de manera que $\measuredangle ACP = \measuredangle BPC - \measuredangle BAC = 10°$. Luego, $\measuredangle CBQ = \measuredangle PAC = 20°$, $\measuredangle CQB = \measuredangle ACP = 10°$ y $BQ = AC$, es decir, los triángulos $\triangle BCQ$ y $\triangle ACP$ son congruentes, de donde $BC = AP$.

Problema 36. (Problema 3 de 35a. Olimpiada Matemática Española Fase Nacional 1999) Sobre un tablero en forma de triángulo equilátero, como el que se indica en la figura, se juega un solitario. Sobre cada casilla se coloca una ficha. Cada una es blanca por un lado y negra por el otro. Inicialmente, solo una ficha, que está situada en un vértice, tiene la cara negra hacia arriba; el resto tiene la cara blanca hacia arriba. En cada movimiento se retira solo una ficha negra del tablero y se da la vuelta a cada una de las demás que ocupan una casilla vecina (casillas vecinas son las que están unidas por un segmento).

Determina si después de varios movimientos es posible quitar todas las fichas del tablero.



Solución 1

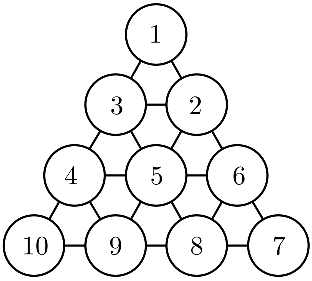
Podemos clasificar las casillas de la figura en tres tipos: las de los vértices, las de los lados del triángulo pero que no son vértices, y la del centro. Las de los vértices tienen 2 casillas vecinas, las de los lados, 4, y la del centro 6, es decir, todas tienen un número par de vecinas.

Demostremos por contradicción que no es posible quitar todas las fichas del tablero con las reglas del juego. Supongamos que se pueden retirar todas las fichas; entonces en el último paso se tenía una única ficha negra, la cual al inicio del juego debió ser blanca, es decir, debió cambiar de color un número impar de veces, pero una ficha cambia de color cuando una ficha vecina es retirada. Esto es una contradicción, pues todas las casillas tienen un número par de vecinas.

Solución 2

Como inicialmente solo hay una ficha negra, el primer movimiento debe empezar con esta y notemos que no importa en cuál vértice está situada pues el triángulo es equilátero.

Numeremos las posiciones de las fichas como en la figura y supongamos que la ficha negra inicial está colocada en la posición 1.



El primer movimiento es quitar la ficha en la posición 1, con lo cual las fichas en las posiciones 2 y 3 se vuelven negras. Dado que estas son simétricas, el siguiente movimiento llevará al mismo resultado, independientemente de cuál quitemos.

Supongamos que quitamos la ficha en la posición 2, entonces las fichas de las posiciones 5 y 6 cambian de color. En este caso, ya no existe simetría, por lo que debemos analizar los dos posibles movimientos:

1. Si quitamos la ficha en la posición 6, entonces las fichas en las posiciones 7 y 8 se vuelven negras, mientras que la ficha en 5 vuelve a blanca. Nuevamente tenemos dos casos por analizar:

    a) Si quitamos la ficha en la posición 8, entonces las fichas en la posición 5 y 9 cambian a negro y la ficha en 7, a blanco y queda aislada (sin fichas vecinas), por lo que no es posible quitar todas las fichas del tablero.

    b) Si quitamos la ficha en la posición 7, entonces la ficha en 8 cambia a blanco. Esto hace que todas las fichas en el trablero sean blancas, por lo que no podemos retirar el total de ellas.

2. Si quitamos la ficha en la posición 5, entonces las fichas en las posiciones 3, 4, 8 y 9 toman el color negro. Como queremos que todas las fichas sean removidas del tablero, observamos que para remover las fichas en las posiciones 6 y 7 debemos auxiliarnos de la ficha en 8.

    Cuando removemos la ficha en la posición 8, las fichas en 6 y 7 se vuelven negras; sin embargo, dado que estas son vecinas, al remover una la otra toma el color blanco y, además, queda aislada, evitando así remover todas las fichas del trablero.

En conclusión, no es posible retirar todas las fichas del tablero con las reglas del juego.

Problema 37. (Problema del Concurso Nacional de la Olimpiada de Matemáticas de Colombia de 1997) Considera una cuadrícula de m por n y tres colores distintos. Se desea colorear cada segmento de la cuadrícula con alguno de los tres colores, de modo que cada cuadro de 1×1 tiene dos lados de un color y dos lados de un segundo color. ¿De cuántas maneras es esto posible?

Solución 1

Llamemos A, B y C a los colores. Analicemos primero el caso $m = 2$ y $n = 1$ y contemos de cuántas formas podemos pintar esta cuadrícula iniciando por el borde superior y los bordes izquierdos. Como cada uno de los bordes mencionados se puede pintar de 3 colores, entonces hay 3^3 formas de pintarlos. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que el borde superior es pintado de color A. Luego, el borde izquierdo del cuadro superior puede ser coloreado de color A o bien de otro color, digamos de color B. Para cada uno de estos casos, el resto de los bordes en la cuadrícula de 2×1 se colorean de dos formas diferentes, según las reglas del problema. Así, la cuadrícula de 2×1 se puede colorear de $3^3 \cdot 2^2$ maneras.

Este resultado nos hace pensar que una cuadrícula de $m \times n$ se puede colorear de $3^{m+n} \cdot 2^{mn}$ maneras. Verifiquemos dicho resultado. Si al igual que antes pintamos los bordes superiores e izquierdos de la cuadrícula, entonces cada segmento de esta tiene 3 opciones de color, es decir, se tienen $3^m \cdot 3^n = 3^{m+n}$ opciones. Si consideramos el cuadro de 1×1 superior izquierdo y coloreamos el borde superior de este, entonces tenemos dos opciones para colorear el cuadro completo. Si seguimos coloreando los cuadros adyacentes a este, cada uno de ellos tendrá 2 opciones para ser coloreado. De esta manera, terminamos de colorear la cuadrícula después de 2^{mn} formas (total de cuadros de la cuadrícula). Así, el número total de maneras en que se puede colorear la cuadrícula de $m \times n$ es $3^{m+n} \cdot 2^{mn}$.

Solución 2

Llamemos a los colores A, B, C y sea a_n el número de formas de colorear una cuadrícula de $1 \times n$, dada la coloración de los segmentos superiores.

Para $n = 1$ supongamos, sin pérdida de generalidad, que el segmento superior es de color A. Entonces, hay 3 maneras de elegir el segundo segmento de color A, y 2 maneras de elegir el color de los dos segmentos restantes, dando un total de $a_1 = 3 \cdot 2 = 6$ coloraciones.

Ahora, buscamos cómo están relacionados $a_{(n+1)}$ con a_n. Dada cualquier coloración de un tablero de $1 \times n$, supongamos, sin pérdida de generalidad, que el último segmento vertical a la derecha es de color A. Al agregar un cuadrado al lado derecho de la cuadrícula de $1 \times n$ obtenemos una cuadrícula de $1 \times (n+1)$, donde la parte superior del nuevo cuadrado es desconocida. Si el nuevo segmento superior es color A, entonces hay 2 maneras de elegir el color de los dos segmentos restantes; si no es de color A, hay dos maneras de elegir cuál de los dos segmentos restantes es de color A. Entonces $a_{(n+1)} = 2a_n$, de donde obtenemos que

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{(n-1)} = 2(2a_{(n-2)}) = \cdots \\ &= 2^{n-1}a_{(n-(n-1))} = 2^{n-1}a_1 \\ &= 2^{n-1}(3 \cdot 2) = 3 \cdot 2^n. \end{aligned}$$

Como el problema original nos pide considerar una cuadrícula de $m \times n$, tenemos 3^n maneras de colorear los segmentos superiores y $3 \cdot 2^n$ maneras de colorear cada fila siguiente (m filas), dando un total de $3^{m+n} \cdot 2^{mn}$ coloraciones.

Problema 38. Considera el conjunto de números $\{1, 2, 3, \ldots, 99, 100\}$.

1. Si se escogen 51 de ellos, muestra que hay dos que no tienen ningún divisor primo común.
2. Si se escogen 51 de ellos, muestra que hay dos, tales que uno divide al otro.

Solución

1. Consideremos las 50 parejas de números consecutivos $(1, 2)$, $(3, 4), \ldots,$ $(99, 100)$. Por el Principio de Casillas, dentro de los 51 números escogidos hay dos números que pertenecen a una de las parejas anteriores $(n, n + 1)$. Si suponemos que hay un número primo p que divide a n y a $n + 1$, entonces también divide a su diferencia; es decir, p divide a $n+1-n = 1$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, la pareja $(n, n+1)$ no tienen ningún divisor primo común.
2. Consideremos los 50 números impares $1, 3, 5, \ldots, 99$ y los correspondientes 50 conjuntos C_k, formados por la multiplicación del impar k por potencias de 2. Así, los conjuntos C_k tienen la forma

   $$\begin{array}{rcl} C_1 & = & \{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\}, \\ C_3 & = & \{3, 6, 12, 24, 48, \ldots\}, \\ C_5 & = & \{5, 10, 20, 40, 80, \ldots\}, \\ & \vdots & \end{array}$$

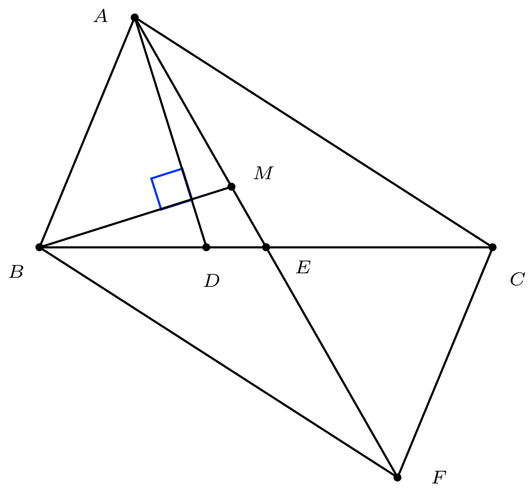
   Por el Principio de Casillas, dentro de los 51 números existen dos diferentes que pertenecen a algún C_k, estos son de la forma $k2^m$ y $k2^n$ para algún número impar k, con $1 \leq k \leq 99$ y $m \neq n$.

   Concluimos que existen dos números diferentes, tales que uno divide al otro.

Problema 39. En el triángulo $\triangle ABC$, la bisectriz interior del ángulo $\measuredangle A$ y la mediana trazada a partir de A cortan a BC en dos puntos distintos D y E, respectivamente. Sea M el punto de intersección de AE y la perpendicular a AD trazada a partir de B. Prueba que AB y DM son paralelas.

Solución 1

Sea F un punto en el semiplano determinado por BC que no contiene a A, tal que $ABFC$ es un paralelogramo.



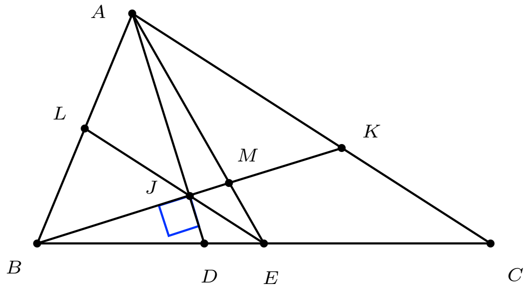
Como las diagonales de un paralelogramo se cortan por la mitad, entonces AF pasa por E, además $\measuredangle BAC + \measuredangle FBA = 180°$. Por otro lado, $\frac{1}{2}\measuredangle BAC + \measuredangle MBA = 90°$, puesto que AD es perpendicular a BM. Por lo tanto, $\measuredangle MBA = \frac{1}{2}\measuredangle FBA$ y, así, BM es bisectriz de $\measuredangle FBA$. Utilizando el Teorema de la Bisectriz en los triángulos $\triangle ABF$ y $\triangle ABC$, tenemos las siguientes igualdades:

$$\frac{AM}{MF} = \frac{BA}{BF} = \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}.$$

Pero AB y CF son paralelas. Entonces, por el Teorema de Thales, se sigue que DM es paralela a AB y CF.

Solución 2

Sean J y K los puntos de intersección de BM con AD y AC, respectivamente.



En el triángulo $\triangle ABK$, la altura AJ es también bisectriz, por lo que también es mediana, y J es punto medio de BK. Por el Teorema de Thales, JE es paralela a KC. Sea L el punto de intersección de EJ con AB. Como LE es paralela a AC, L es punto medio de AB.

Considerando que las cevianas BM, EL y AD de $\triangle ABE$ son concurrentes en J, el Teorema de Ceva nos dice que:

$$1 = \frac{EM}{MA} \cdot \frac{AL}{LB} \cdot \frac{BD}{DE} = \frac{EM}{MA} \cdot \frac{BD}{DE},$$

de donde

$$\frac{EM}{MA} = \frac{ED}{DB}.$$

Por el Teorema de Thales concluimos que AB y DM son paralelas.

Problema 40. (Problema de la Competencia Matemática Austriaco-Polaca de 1996) Se nos ha dado una colección de ladrillos rectangulares, ninguno de los cuales es un cubo. Las longitudes de los bordes son números enteros. Para cada terna de enteros positivos (a, b, c) hay un suministro suficiente de ladrillos $a \times b \times c$. Supongamos que los ladrillos llenan completamente una caja de $10 \times 10 \times 10$. Ahora,

1. Supongamos que se han utilizado al menos 100 ladrillos. Demuestra que existen al menos dos ladrillos paralelos; esto es, si AB es un borde de uno de los ladrillos, $A'B'$ es un borde de otro y AB es paralelo a $A'B'$, entonces $AB = A'B'$.

2. Demuestra la misma afirmación con 100 reemplazado por un número menor.

Solución

Probaremos la afirmación con 97 ladrillos. Para cada número entero hasta 16 tabulamos el número de ladrillos no paralelos de ese volumen (no permitiendo ladrillos cúbicos ni ladrillos con una dimensión mayor que 10) y su volumen total:

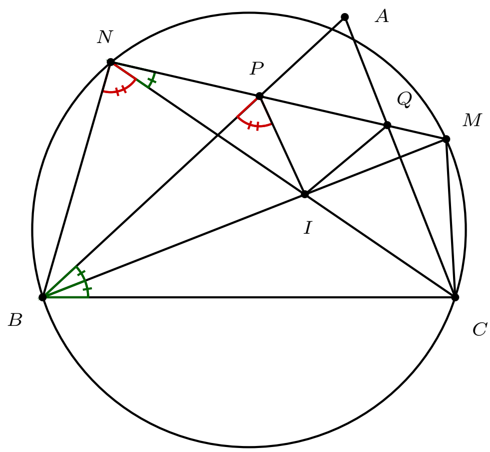
Volumen	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	15	16
Número	3	3	6	3	9	3	9	6	9	15	6	6	12
Total	6	9	24	15	54	21	72	54	90	180	74	90	192

Supongamos que no hay dos ladrillos paralelos. Los 90 ladrillos más pequeños tienen un volumen total de 891, los otros 7 ladrillos tienen un volumen de al menos 18 cada uno, dando un volumen total de al menos 1017, lo cual es una contradicción.

No hemos determinado la constante óptima (uno puede mejorar lo anterior a 96 con facilidad), pero notemos que un arreglo con 73 ladrillos no paralelos es posible.

Problema 41. Sea $\triangle ABC$ un triángulo acutángulo. Las bisectrices de $\measuredangle ABC$ y $\measuredangle ACB$ cortan a una circunferencia S que pasa por B y C en los puntos M y N, respectivamente. La recta MN corta a AB en P y a AC en Q. Demuestra que la circunferencia inscrita a $\triangle ABC$ es tangente a AB en P y a AC en Q si y solo si BC es diámetro.

Solución
Sea I el incentro de $\triangle ABC$, es decir, I es el punto de intersección de las bisectrices BM y CN.



Tenemos que $\measuredangle ABM = \measuredangle MBC$ porque BM es bisectriz de $\measuredangle ABC$ y, además, $\measuredangle MBC = \measuredangle MNC$ porque el cuadrilátero $BNMC$ es cíclico. Por lo tanto, $\measuredangle ABM = \measuredangle MNC$, de donde el cuadrilátero $BPNI$ es cíclico y

$$\measuredangle BNI = \measuredangle BPI.$$

Análogamente, $\measuredangle ACN = \measuredangle NCB$ porque CN es bisectriz de $\measuredangle ACB$, y $\measuredangle NCB = \measuredangle NMB$ porque el cuadrilátero $BNMC$ es cíclico. De esta manera, $\measuredangle ACN = \measuredangle NMB$, por lo que el cuadrilátero $CMQI$ es cíclico y, así,

$$\measuredangle CMI = \measuredangle CQI.$$

Finalmente, observemos que el incírculo de $\triangle ABC$ es tangente a AB en P y a AC en Q si y solo si $\measuredangle BPI = 90° = \measuredangle CQI$; esto es, equivalente a que $\measuredangle BNI = 90° = \measuredangle CMI$. Es decir, la circunferencia inscrita a $\triangle ABC$ es tangente a AB en P y a AC en Q si y solo si BC es diámetro de S.

Problema 42. Demuestra que existe un entero positivo n tal que

$$\left(\sqrt{2013} - \sqrt{2012}\right)^{2014} = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

Solución

Observemos que

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt{2013} - \sqrt{2012}\right)^{2014} \\
&\quad = \binom{2014}{0}\left(\sqrt{2013}\right)^{2014} - \binom{2014}{1}\left(\sqrt{2013}\right)^{2013}\left(\sqrt{2012}\right)^{1} \\
&\qquad + \cdots + \binom{2014}{2014}\left(\sqrt{2012}\right)^{2014} \\
&\quad = \sum_{k=0}^{1007}\binom{2014}{2k}\left(\sqrt{2013}\right)^{2k}\left(\sqrt{2012}\right)^{2014-2k} \\
&\qquad - \sum_{k=0}^{1006}\binom{2014}{2k+1}\left(\sqrt{2013}\right)^{2k+1}\left(\sqrt{2012}\right)^{2014-(2k+1)} \\
&\quad = \sum_{k=0}^{1007}\binom{2014}{2k}(2013)^{k}(2012)^{1007-k} \\
&\qquad - \frac{\sqrt{2013}}{\sqrt{2012}}\sum_{k=0}^{1006}\binom{2014}{2k+1}\left(\sqrt{2013}\right)^{2k}\left(\sqrt{2012}\right)^{2014-2k} \\
&\quad = \sum_{k=0}^{1007}\binom{2014}{2k}(2013)^{k}(2012)^{1007-k} \\
&\qquad - \frac{\sqrt{2013}}{\sqrt{2012}}\sum_{k=0}^{1006}\binom{2014}{2k+1}(2013)^{k}(2012)^{1007-k}.
\end{aligned}$$

De la misma forma podemos ver que

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{2013} + \sqrt{2012}\right)^{2014} &= \sum_{k=0}^{1007}\binom{2014}{2k}(2013)^{k}(2012)^{1007-k} \\
&\quad + \frac{\sqrt{2013}}{\sqrt{2012}}\sum_{k=0}^{1006}\binom{2014}{2k+1}(2013)^{k}(2012)^{1007-k}.
\end{aligned}$$

Llamemos

$$\begin{aligned}
\alpha &= \sum_{k=0}^{1007}\binom{2014}{2k}(2013)^{k}(2012)^{1007-k}, \\
\beta &= \frac{\sqrt{2013}}{\sqrt{2012}}\sum_{k=0}^{1006}\binom{2014}{2k+1}(2013)^{k}(2012)^{1007-k}.
\end{aligned}$$

Entonces, α es un entero mayor a 1 y tenemos

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{2013} - \sqrt{2012}\right)^{2014} &= \alpha - \beta, \\
\left(\sqrt{2013} + \sqrt{2012}\right)^{2014} &= \alpha + \beta.
\end{aligned}$$

De esta manera, obtenemos:

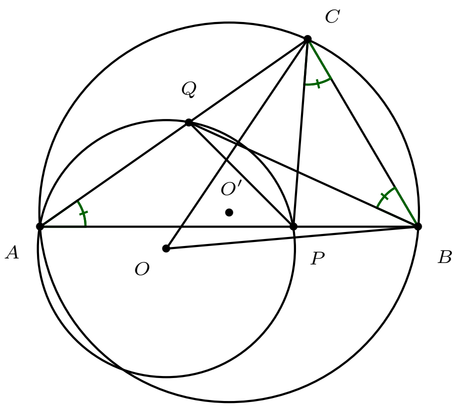
$$\begin{aligned} 1 &= \left[\left(\sqrt{2013}-\sqrt{2012}\right)\left(\sqrt{2013}+\sqrt{2012}\right)\right]^{2014} \\ &= \left(\sqrt{2013}-\sqrt{2012}\right)^{2014}\left(\sqrt{2013}+\sqrt{2012}\right)^{2014} \\ &= (\alpha-\beta)(\alpha+\beta) \\ &= \alpha^2-\beta^2. \end{aligned}$$

De donde $\beta^2=\alpha^2-1$ y dado que α es entero mayor que 1, existe un entero n positivo mayor que 1, tal que $\alpha^2=n$ y, en consecuencia, $\beta^2=n-1$. De esta manera, podemos concluir que para algún n entero positivo se cumple que

$$\left(\sqrt{2013}-\sqrt{2012}\right)^{2014}=\alpha-\beta=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}.$$

Problema 43. Sea $\triangle ABC$ un triángulo cuyo lado más pequeño es BC. Sean P un punto de AB tal que $\measuredangle PCB=\measuredangle BAC$ y Q un punto sobre AC tal que $\measuredangle QBC=\measuredangle BAC$. Demuestra que la recta que pasa a través de los centros de los circuncírculos de $\triangle ABC$ y $\triangle APQ$ es perpendicular a BC.

Solución
Sean O y O' los circuncentros de $\triangle APQ$ y $\triangle ABC$, respectivamente. Sea r el circunradio de $\triangle APQ$.



Al considerar la potencia desde B y C respecto al circuncírculo de $\triangle APQ$, tenemos que

$$\begin{aligned} BP\cdot BA &= BO^2-r^2, \\ CQ\cdot CA &= CO^2-r^2. \end{aligned}$$

Por otra parte, como $\triangle ABC$ y $\triangle BPC$ comparten el ángulo $\measuredangle ABC$ y $\measuredangle BAC=\measuredangle PCB$, por el criterio AA son semejantes, de modo que $BP\cdot BA=BC^2$. De manera análoga podemos ver que $\triangle ABC$ y $\triangle BQC$ son semejantes, de donde $CQ\cdot CA=BC^2$.

Luego, $BO^2 - r^2 = CO^2 - r^2$, de donde $BO = CO$. Así, O está en la mediatriz del segmento BC. Por lo tanto, O, O' y el punto medio de BC son colineales. Concluimos que OO' y BC son perpendiculares.

Problema 44. (Problema 3 del Concurso Nacional de la Olimpiada de Matemáticas de Canadá de 1997) Demuestra que

$$\frac{1}{1999} < \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{1997}{1998} < \frac{1}{44}.$$

Solución
Sean

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{1997}{1998},\\ q &= \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{1998}{1999}. \end{aligned}$$

Notemos que para cada número $k \in \mathbb{N}$ tenemos que $(k-1)(k+1) = k^2-1 < k^2$ y así $\frac{k-1}{k} < \frac{k}{k+1}$. Además, como

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3},\ \frac{3}{4} < \frac{4}{5},\ \ldots,\ \frac{1997}{1998} < \frac{1998}{1999}.$$

Entonces $p < q$, ya que el número de factores de p es igual al de q. Lo anterior implica que $p^2 < pq = \frac{1}{1999}$. Por lo tanto,

$$p < \frac{1}{\sqrt{1999}} < \frac{1}{\sqrt{1936}} = \frac{1}{44}.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{1997}{1998}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{4}{4}\cdot\frac{6}{6}\cdots\frac{1998}{1998}\\ &= \frac{1998!}{(2\cdot 4\cdot 6\cdots 1998)^2}\\ &= \frac{1998!}{(999!\cdot 2^{999})^2} = 2^{-1998}\binom{1998}{999}. \end{aligned}$$

Como además tenemos que

$$2^{1998} = (1+1)^{1998} = \binom{1998}{0} + \binom{1998}{1} + \cdots + \binom{1998}{1998} < 1999\binom{1998}{999},$$

entonces $p > \frac{1}{1999}$.

Problema 45.

1. Sea $X \neq A$ el punto de intersección de la bisectriz de $\measuredangle BAC$ con el circuncírculo de $\triangle ABC$. Considera I un punto en AX. Demuestra que I es el incentro de $\triangle ABC$ si y solo si $XI = XB = XC$.

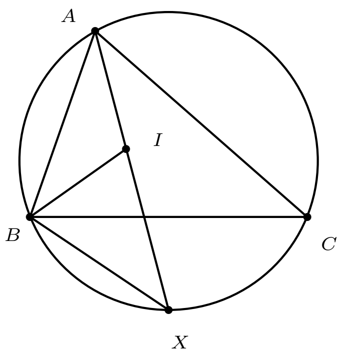
2. (Problema 3 de la Olimpiada Australiana de Matemáticas de 1982) Sea I el incentro de $\triangle ABC$. Si AI, BI y CI se intersecan con el circuncírculo de $\triangle ABC$ en los puntos P, Q y R, respectivamente, demuestra que

$$AP + BQ + CR > AB + BC + CA.$$

Solución

1. Observemos que $\measuredangle BAX = \measuredangle CAX = \measuredangle CBX$, de donde $XB = XC$. Tenemos la siguiente serie de equivalencias:

$$\begin{aligned} I \text{ es el incentro de } \triangle ABC \quad &\Leftrightarrow \quad \measuredangle CBI = \measuredangle ABI \\ &\Leftrightarrow \quad \measuredangle IBX - \measuredangle CBX = \measuredangle BIX - \measuredangle BAX \\ &\Leftrightarrow \quad \measuredangle IBX = \measuredangle BIX \\ &\Leftrightarrow \quad XI = XB = XC. \end{aligned}$$



2. Sea I el incentro de $\triangle ABC$. Por el inciso anterior, se tienen las igualdades siguientes:

$$\begin{aligned} 2IR &= AR + BR > AB, \\ 2IP &= BP + CP > BC, \\ 2IQ &= CQ + AQ > CA. \end{aligned}$$

Por otro lado, también se cumplen las siguientes relaciones:

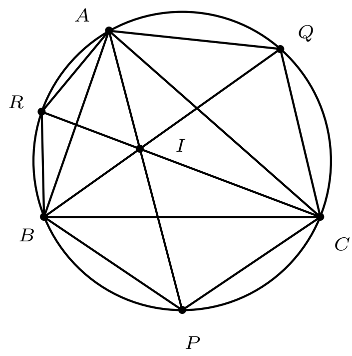
$$\begin{aligned} AI + IB &> AB, \\ BI + IC &> BC, \\ CI + IA &> CA. \end{aligned}$$

Al sumar las desigualdades obtenidas tenemos que

$$2(AI + BI + CI) + 2(IP + IQ + IR) > 2(AB + BC + CA),$$

lo cual implica que:

$$AP + BQ + CR > AB + BC + CA.$$



Problema 46. Demuestra que para cada entero $n \geq 0$, el número 7^{7^n} es el producto de al menos $2n+3$ números primos no necesariamente distintos.

Solución

Procedemos por inducción. Si $n = 0$, tenemos que $7^{7^0} + 1 = 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ es el producto de $2(0) + 3 = 3$ números primos iguales.

Sea $A_n = 7^{7^n} + 1$ y supongamos que A_n satisface el problema. Demostraremos que A_{n+1} es el producto de al menos $2(n+1)+3$ primos no necesariamente distintos. En efecto, notemos que

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= (A_n - 1)^7 + 1 \\ &= A_n\left[(A_n)^6 - 7(A_n)^5 + 21(A_n)^3 + 35(A_n)^2 - 21(A_n) + 7\right] \\ &= A_n\left[(A_n)^6 - 7(A_n - 1)((A_n)^2 - A_n + 1)^2\right]. \end{aligned}$$

Como $7(A_n - 1) = 7(7^{7^n}) = 7^{7^n+1}$ y $7^n + 1$ es par, tenemos que $7(A_n - 1)$ es un cuadrado y, en consecuencia, $7(A_n - 1)((A_n)^2 - A_n + 1)^2$ también. Luego, $A_n(A_n)^6 - 7(A_n - 1)((A_n)^2 - A_n + 1)^2$ es la diferencia de dos cuadrados, digamos $x^2 - y^2$. De aquí que cada uno de los factores $x+y$ y $x-y$ aporta al menos un número primo y, junto con los $2n+3$ factores primos no necesariamente distintos de A_n, tenemos que $A_{n+1} = A_n(x+y)(x-y)$ es el producto de al menos $2n+3+2 = 2(n+1)+3$ primos no necesariamente distintos.

Problema 47. (Problema 1 de la XI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas de 1996) Sea n un número natural. Un cubo de longitud lateral n puede ser dividido en 1996 cubos, cuyas longitudes laterales tambien son números naturales. Determina el menor valor posible para n.

Solución

Dado que $1996 > 12^3$, tenemos que $n \geq 13$, de aquí veamos que $n = 13$ satisface. Dentro de un cubo de lado 13 podemos poner un cubo de lado 5, un cubo de lado 4 y dos de lado 2, y llenar lo restante con cubos de lado 1. El número de cubos usados es

$$13^3 - (5^3 - 1) - (4^3 - 1) - 2(2^3 - 1) = 2197 - 124 - 63 - 2(7) = 1996,$$

como queríamos demostrar.

Problema 48. (Problema 8.1 del Torneo de Matemáticas de Primavera de Bulgaria de 1997) Encuentra todos los valores reales de m que hacen que la ecuación

$$[x^2 - 2mx - 4(m^2 + 1)]\,[x^2 - 4x - 2m(m^2 + 1)] = 0$$

tenga exactamente tres raíces diferentes.

Solución 1
Sean $P(x) = x^2 - 2mx - 4(m^2 + 1)$, $Q(x) = x^2 - 4x - 2m(m^2 + 1)$ y $R(x) = P(x)Q(x)$, entonces el problema se reduce a hallar todos los números reales m tales que $R(x)$ tiene tres raíces diferentes. Dado que $R(x)$ es producto de dos polinomios cuadráticos, este tendrá tres raíces diferentes cuando $P(x)$ y $Q(x)$ compartan exactamente una raíz o cuando alguno de ellos sea un trinomio cuadrado perfecto. Consideremos los posibles casos:

- Si $P(x)$ es un trinomio cuadrado perfecto, entonces $P(x) = x^2 - 2mx - 4(m^2 + 1) = (x - m)^2 - 5m^2 - 4$ y así $5m^2 + 4 = 0$, lo cual implica que no existe un valor real m.

- Si $Q(x)$ es un trinomio cuadrado perfecto, entonces $Q(x) = x^2 - 4x - 2m(m^2+1) = (x-2)^2 - 2(m^3+m+2)$ y, así, $m^3+m+2 = (m+1)(m^2 - m + 2) = 0$. Como el segundo factor siempre es positivo para todo real m, entonces la única solución a esta última igualdad es $m = -1$. Sin embargo, al sustituir en $P(x)$ y $Q(x)$ obtenemos que $P(x) = (x + 1)^2 - 9 = (x - 2)(x + 4)$ y $Q(x) = (x - 2)^2$, por lo que no se obtienen tres raíces diferentes.

Observación. El valor real m debe ser diferente a 2, en caso contrario se tiene que $P(x) = Q(x) = x^2 - 4x - 20$ y, entonces, $R(x)$ tendría solamente dos raíces diferentes, cada una de ellas con multiplicidad dos.

- Si $P(x)$ y $Q(x)$ tienen una raíz común, entonces se cumple que:

$$\begin{aligned} P(x) &= Q(x), \\ -2mx - 4(m^2 + 1) &= -4x - 2m(m^2 + 1), \\ 2(m - 2)(m^2 + 1) &= 2x(m - 2). \end{aligned}$$

  Haciendo uso de la observación podemos dividir por $m - 2$, obteniendo que $x = m^2 + 1$ es la raíz común entre $P(x)$ y $Q(x)$. Así, podemos reescribir $P(x)$ como $P(x) = (x - (m^2 + 1))(x + 4)$ donde, por las Fórmulas de Vieta, se debe cumplir que $(m^2 + 1) - 4 = 2m$, es decir, $m^2 - 2m - 3 = (m + 1)(m - 3) = 0$. Anteriormente analizamos el caso $m = -1$ y vimos que no cumplía con las condiciones del problema. Consideremos entonces el caso $m = 3$. Sustituyendo en $P(x)$ y $Q(x)$ obtenemos

$$\begin{aligned} P(x) &= x^2 - 20x - 40 = (x - 10)(x + 4), \\ Q(x) &= x^2 - 4x - 60 = (x - 10)(x + 6), \end{aligned}$$

  cumpliéndose así las condiciones del problema.

Solución 2
Al igual que en la solución anterior definimos $P(x) = x^2 - 2mx - 4(m^2+1)$, $Q(x) = x^2 - 4x - 2m(m^2+1)$ y $R(x) = P(x)Q(x)$ y analizamos de la misma forma los casos en que $P(x)$ y $Q(x)$ son trinomios cuadrados perfectos. Veamos cómo cambia el análisis en el caso en que $P(x)$ y $Q(x)$ tienen una raíz común.

Supongamos que $x - r$ es un factor común a $P(x)$ y $Q(x)$, entonces debe ser factor de $P(x) - Q(x) = (2m-4)x - (2m^3 - 4m^2 + 2m - 4) = (2m-4)(x-r)$, es decir, se debe cumplir que $(2m-4)r = 2m^3 - 4m^2 + 2m - 4$ o, equivalentemente, $(2m-4)r = (2m-4)(m^2+1)$. Así $m = 2$ o $r = m^2 + 1$; para el caso $m = 2$ tenemos que $P(x) = Q(x) = x^2 - 4x - 20$ y obtenemos que $R(x)$ tiene solamente dos raíces diferentes, cada una de ellas de multiplicidad dos. Así, el factor común es $r = m^2 + 1$. La conclusión se sigue como antes, obteniendo que el único valor real de m, que hace que $R(x)$ tenga exactamente tres raíces diferentes, es $m = 3$.

Problema 49. Una cuadrícula rectangular es coloreada como un tablero de ajedrez, donde cada casilla contiene un número entero. Se sabe que la suma de los números en cada fila y la suma de los números en cada columna es par. Demuestra que la suma de todos los números en las casillas negras es par.

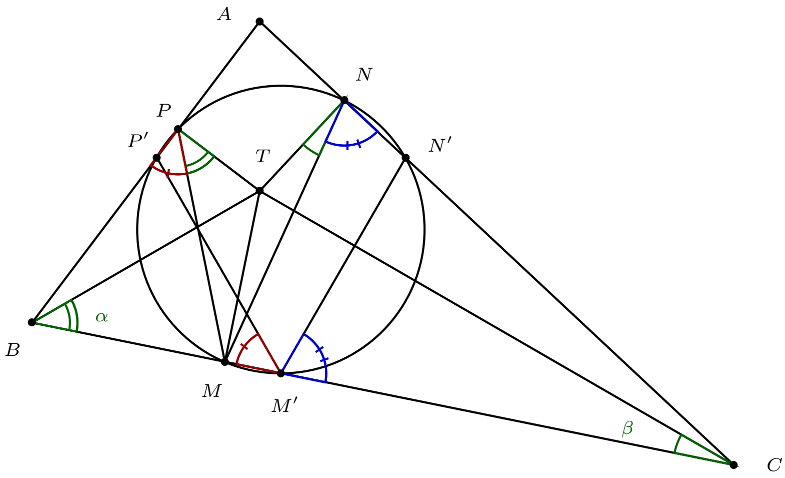
Solución
Supongamos que los colores son blanco y negro, con el cuadrado en la esquina superior izquierda de color blanco. Dado que la suma de todos los números es par, basta demostrar que la suma de los números en los cuadrados negros es par.

La suma de la primera (desde arriba), segunda, tercera, etc., filas y la primera (desde la izquierda), segunda, tercera, etc., columnas es igual a la suma de todos los cuadrados negros más el doble de la suma de algunos de los cuadrados blancos. Dado que esta suma es par, la suma de todos los números en los cuadrados negros es par.

Problema 50. Sea $\triangle ABC$ un triángulo acutángulo y sea T un punto en su interior tal que $\measuredangle ATB = \measuredangle BTC = \measuredangle CTA$. Sean M, N y P las proyecciones de T sobre BC, AC y AB, respectivamente. El circuncírculo de $\triangle MNP$ interseca a BC, AC y AB por segunda vez en los puntos M', N' y P', respectivamente. Demuestra que $\triangle M'N'P'$ es equilátero.

Solución
Sean $\alpha = \measuredangle TBC$ y $\beta = \measuredangle TCB$. Como $\measuredangle ATB = \measuredangle BTC = \measuredangle CTA = 120°$, entonces

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= \measuredangle TBC + \measuredangle TCB \\ &= 180° - \measuredangle BTC \\ &= 60°.\end{aligned}$$



Además, ya que $\measuredangle BPT = \measuredangle BMT = 90^\circ$, entonces $BMTP$ es cíclico, de donde $\measuredangle MPT = \measuredangle MBT = \alpha$. De manera semejante, podemos ver que $CNTM$ es cíclico, lo cual implica que $\measuredangle MNT = \measuredangle MCT = \beta$.

Por otro lado, el cualdrilátero $PP'MM'$ es cíclico, por lo que $\measuredangle BM'P' = \measuredangle MPP' = \measuredangle BPT - \measuredangle MPT = 90^\circ - \alpha$. Y ya que $MM'N'N$ también es cíclico tenemos $\measuredangle CM'N' = \measuredangle MNN' = \measuredangle CNT - \measuredangle MNT = 90^\circ - \beta$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\measuredangle P'M'N' &= 180^\circ - \measuredangle BM'P' - \measuredangle CM'N' \\ &= 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - (90^\circ - \beta) \\ &= \alpha + \beta \\ &= 60^\circ.\end{aligned}$$

Análogamente, podemos probar que los ángulos $\measuredangle M'P'N' = \measuredangle M'N'P' = 60^\circ$, de donde concluimos que $\triangle M'N'P'$ es equilátero.

Problema 51. Encuentra todas las ternas ordenadas (x, y, z) que satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}x + y + z &= 17, \\ xy + yz + xz &= 94, \\ xyz &= 168.\end{aligned}$$

Solución

Observemos que x, y y z satisfacen las Fórmulas de Vieta para un polinomio de grado 3, cuyos coeficientes son $\sigma_1 = 17$, $\sigma_2 = 94$ y $\sigma_3 = 168$. Luego, x, y y z son soluciones de la ecuación

$$f(a) = a^3 - 17a^2 + 94a - 168 = 0.$$

Como 7 es un factor de 168, veamos que $a=7$ es solución; en efecto,

$$\frac{f(a)}{a-7} = a^2 - 10a + 24 = (a-4)(a-6).$$

Entonces, $f(a) = (a-7)(a-4)(a-6)$. Así, todas las posibles ternas ordenadas (x, y, z) son las permutaciones de $(4, 6, 7)$.

Problema 52. Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ circunferencias concéntricas, con $\mathcal{C}_2$ en el interior de $\mathcal{C}_1$. Desde un punto A sobre $\mathcal{C}_1$ se traza una tangente AB a $\mathcal{C}_2$ (con B en $\mathcal{C}_2$). Sean C el segundo punto de intersección de AB con $\mathcal{C}_1$ y D el punto medio de AB. Una línea que pasa por A interseca a $\mathcal{C}_2$ en E y F, de tal manera que las mediatrices de DE y CF se cortan en un punto M, en la recta AB. Encuentra el valor de la razón $\frac{AM}{MC}$.

Solución

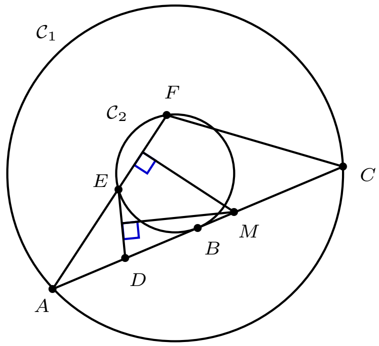
La potencia del punto A respecto a $\mathcal{C}_2$ es :

$$AE \cdot AF = AB^2.$$

Por otro lado,

$$AD \cdot AC = \frac{AB}{2} \cdot 2AB = AB^2.$$

Luego, $AE \cdot AF = AD \cdot AC$. De esta manera, los triángulos $\triangle ADE$ y $\triangle AFC$ son semejantes, por criterio LAL. Así, $\measuredangle AED = \measuredangle ACF$, por lo que el cuadrilátero $DEFC$ es cíclico.



Como está sobre las mediatrices de DE y CF, M es el circuncentro de $DEFC$. En consecuencia, M también está en la mediatriz de CD y como M está sobre AB, entonces es el punto medio de CD. Por lo tanto,

$$\frac{AM}{MC} = \frac{5}{3}.$$

Capítulo 6

Soluciones de la 28a. OMM Concurso Nacional

6.1. Primer día

Problema 1. Cada uno de los números de 1 al 4027 se ha coloreado de verde o de rojo. Cambiar el color de un número es pasarlo a verde si era rojo, y pasarlo a rojo si era verde. Diremos que dos enteros positivos m y n son cuates si alguno de los números $\frac{m}{n}$ o $\frac{n}{m}$ es primo. Un *paso* consiste en elegir dos números que sean cuates y cambiar el color de cada uno de los números. Muestra que después de realizar algunos de los pasos es posible hacer que todos los números de 1 al 2014 sean verdes.

Solución 1
Primero probaremos inductivamente que podemos poner los números del 1 al 2013 de color verde. Notemos que para cualquier entero positivo n, tenemos que n y $2n$ son cuates, pues $\frac{2n}{n} = 2$ es un número primo. Si 1 es verde, no lo cambiamos, si es rojo, hacemos un paso en 1 y 2, logrando que 1 quede verde. Supongamos que tras algunos pasos ya quedaron de color verde los números de 1 a j con $j < 2013$. Si $j+1$ es verde, lo dejamos así, si $j+1$ es rojo, entonces hacemos el paso en $j+1$ y en $2j+2$. Esto deja los números de 1 a $j+1$ de color verde, completando el paso inductivo. Tras la inducción tenemos que los números de 1 a 2013 son verdes. Si después de los pasos realizados el 2014 quedó verde, terminamos, en caso contrario realizamos un paso en 2014 y 1007 y un paso en 1007 y 3021, estos últimos son cuates porque $\frac{3021}{1007} = 3$. Esto vuelve a 2014 verde y deja a 1007 sin alterar, pues se cambió dos veces. Con estos pasos dejamos a los números del 1 a 2014 de color verde.

Solución 2
Demostraremos un enunciado más general: cada uno de los números del 1 al $2n-1$ es coloreado de verde o de rojo, entonces después de algunos

pasos es posible hacer que $1, 2, \ldots, n$ sean verdes. Para esto, usaremos una consecuencia del Postulado de Bertrand: "para todo $n > 1$, existe un primo p tal que $n < p < 2n$".

Demostraremos el enunciado por inducción sobre n. Si $n = 2$ tenemos los números $1, 2$ y 3. Si 1 y 2 son del mismo color, los podemos cambiar para que sean verdes. Si no, hacemos paso 1 y 3 para que 1 y 2 tengan el mismo color y hacemos el paso anterior, con lo cual 1 y 2 quedan verdes.

Supongamos que el enunciado es cierto para $n = k - 1$, o sea, de la lista $1, 2, \ldots, 2(k-1) - 1$ podemos hacer cambios de colores y hacer que $1, 2, \ldots, k - 1$ sean verdes. Consideremos el caso $n = k$. Por hipótesis de inducción usamos los números del 1 al $2(k-1) - 1$ para hacer a todos los números del 1 al $k - 1$ verdes y tendríamos dos casos:

Si k es verde, ya terminamos.

Si k es rojo, tenemos a su vez dos casos: si k es primo, consideremos a q como el primo más grande entre 1 y $k - 1$, el cual, por el Postulado de Bertrand, satisface $\frac{k}{2} < q < k - 1$; luego hacemos pasos entre k y 1, entre 1 y q, y, finalmente, entre q y $2q$, con lo que los números entre 1 y k quedan de verde. Ahora, si k es compuesto y es par, hacemos pasos entre k y $\frac{k}{2}$, luego entre $\frac{k}{2}$ y $\frac{3k}{2}$; por otra parte, si k es compuesto impar, tomemos a r como el factor primo más grade de k, entonces k y $\frac{k}{r}$ son cuates, por lo que podemos hacer un paso y volver a k de verde y $\frac{k}{r}$ se vuelve rojo. Por otro lado, por el Postulado de Bertrand existe un primo s tal que $r < s < 2r$, por lo que podemos hacer paso entre $\frac{k}{r}$ y $\frac{ks}{r}$, volvemos a $\frac{k}{r}$ verde y con eso terminamos.

Solución 3

Diremos que dos números m y n están conectados si existe un entero k y enteros $n_1, \ldots, n_k$, tales que $n_1 = m$, $n_k = n$ y para todo $j = 1, \ldots, k - 1$ se tiene que n_j y n_{j+1} son cuates. Esto nos permite hacer pasos en cada una de las parejas n_j y n_{j+1}, para $j = 1, \ldots, k - 1$. Notemos que tras hacer todos estos pasos cada entero se cambió de color dos veces excepto $n_1 = m$ y $n_k = n$, por lo que si dos enteros están conectados, entonces podemos cambiar el color de cada uno de ellos sin alterar nada más.

A los enteros $n_1, \ldots, n_k$ les llamaremos el camino entre m y n. Si m está conectado con n y n está conectado con l, entonces al juntar los caminos concluimos que m está conectado con l. Además, cualquier número está conectado con 1, pues podemos hacer el camino quitando los primos uno por uno. De esta forma, para cualquier par de enteros m y n tenemos que m está conectado con 1 y que 1 está conectado con n, y, por lo tanto, m está conectado con n. Esto muestra que cualquier par de enteros están conectados.

Para resolver el problema procedamos como sigue: para cada n rojo entre 1 y 2014 cambiamos simultáneamente el color de n y 4027, esto hace que todos los enteros entre 1 y 2014 queden verdes.

De hecho, este método permite dejar todos los enteros entre 1 y 4026 de color verde.

Problema 2. Un entero positivo a se reduce a un entero positivo b si al dividir a entre sus dígitos de las unidades se obtiene b. Por ejemplo, 2015 se reduce a $\frac{2015}{5} = 403$. Encuentra todos los enteros positivos que, mediante algunas reducciones, llegan al número 1. Por ejemplo, el número 12 es uno de tales enteros, pues 12 se reduce a 6 y 6 se reduce a 1.

Solución

Llamaremos números reducibles a los que tras algunas reducciones llegan a 1. Sabemos que los números $1, 2, \ldots, 9$ son reducibles. Sea M un entero positivo reducible; sabemos que si se reduce a N, entonces N también es un número reducible, por lo tanto podemos construir los números reducibles a partir de números menores que son reducibles. Sea d el dígito de las unidades de M y supongamos que $M > N > 1$, ya que estamos buscando soluciones no triviales. Como M se puede reducir a un número menor, tenemos que d no es 1 ni 0, por la misma razón N no puede ser 1 o $0 \pmod{10}$.

Tenemos que $\frac{M}{d} = N$, entonces $M = Nd$ y considerando esta ecuación, módulo 10, se tiene que

$$Nd \equiv d \pmod{10},$$

es decir:

$$d(N-1) \equiv 0 \pmod{10}.$$

En consecuencia, 2 y 5 tienen que dividir ya sea a d o a $N-1$. No puede darse el caso en que 2 y 5 dividen a d porque esto implica que d es divisible por 10, lo cual no es posible, porque d es un dígito. Tampoco se da el caso en que 2 y 5 dividen a $N-1$ porque esto implica que N tiene al número 1 como última cifra, lo cual no es posible por hipótesis. Por lo tanto, los únicos casos posibles son:

- 2 divide a d y 5 divide a $N-1$. Aquí tenemos que $d = 2, 4, 6, 8$ y que $N-1 \equiv 0 \pmod{5}$. Como N no termina en 1 entonces $N \equiv 6 \pmod{10}$.
- 5 divide a d y 2 divide a $N-1$. Ya que $d \neq 0$ se tiene que $d = 5$. Ahora, como $N \equiv 1 \pmod{2}$ entonces $N \equiv 3, 5, 7, 9 \pmod{10}$.

Damos una lista de valores iniciales de N y los posibles valores para d:

	N	d
(a)	3	5
(b)	5	5
(c)	6	$2, 4, 6, 8$
(d)	7	5
(e)	9	5

Al usar los casos (a), (b), (d) y (e) nos damos cuenta que M termina en 5 y solo podemos usar el caso (b) para construir los demás números reducibles, cuando hacemos que M sea nuestro nuevo N. Por lo tanto, los números para estos casos son los de la forma $(3)5^k, 5^k, (7)5^k, (9)5^k$.

Ahora, usando el caso (c), al multiplicar 6 por cualquier número que no sea 6 no se podrán crear más números reducibles a 1, por ejemplo, si elegimos $6 \cdot 2 = 12$, entonces $M = 12$, pero a partir de este número no podemos crear más reducibles. La única opción de crear números es multiplicando 6 por 6 varias veces y después podríamos multiplicar por otro número del paso (3) que no sea 6 y terminaríamos. Por lo tanto, esto nos genera los números $(2)6^k, (4)6^k, 6^k, (8)6^k$.

En conclusión, los números que cumplen son:

$$(3)5^k, 5^k, (7)5^k, (9)5^k, (2)6^k, (4)6^k, 6^k, (8)6^k,$$

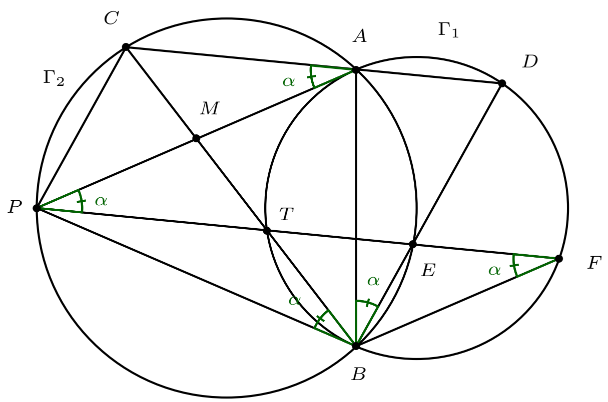
para $k \geq 0$.

Problema 3. Sean Γ_1 una circunferencia y P un punto fuera de Γ_1. Las tangentes desde P a Γ_1 tocan a la circunferencia en los puntos A y B. Considera M el punto medio del segmento PA y Γ_2 la circunferencia que pasa por los puntos P, A y B. La recta BM interseca de nuevo a Γ_2 en el punto C, la recta CA interseca de nuevo a Γ_1 en el punto D, el segmento DB interseca de nuevo a Γ_2 en el punto E y la recta PE interseca a Γ_1 en el punto F (con E entre P y F).

Muestra que las rectas AF, BP y CE concurren.

Solución 1

Sean $\alpha = \measuredangle PBM$ y T la intesección del segmento BM con Γ_1. La potencia del punto M respecto a la circunferencia Γ_1 es $MA^2 = MT \cdot MB$; y como M es el punto medio de PA, entonces $MP^2 = MA^2 = MT \cdot MB$.



Por el criterio LAL, lo anterior implica que $\triangle MPT$ y $\triangle MBP$ son semejantes, puesto que comparten el ángulo $\measuredangle PMT$. Por lo tanto, $\measuredangle MPT = \measuredangle PBM = \alpha$. Al ser A, C, P, B y E concíclicos tenemos que $\measuredangle PAC = \measuredangle PBC = \alpha$ y $\measuredangle APE = \measuredangle ABE$; además, por ángulos semiinscritos se cumple que $\measuredangle ABE = \measuredangle ABD = \measuredangle PAC = \alpha$. Por lo tanto, $\measuredangle APE = \alpha = \measuredangle MPT$, de donde se sigue que P, T y E son colineales.

Como $\measuredangle APE = \measuredangle PAC$, entonces CA y PF son paralelas. Por ángulos semiinscritos y considerando el cuadrilátero cíclico $PBAC$ tenemos que $\measuredangle ADB = \measuredangle PBA = 180° - \measuredangle PCA$, por lo que PC y BD son paralelas. De nuevo, utilizando ángulos semiinscritos tenemos $\measuredangle APE = \alpha = \measuredangle PBT = \measuredangle BFT$, por lo que PA y BF son paralelas.

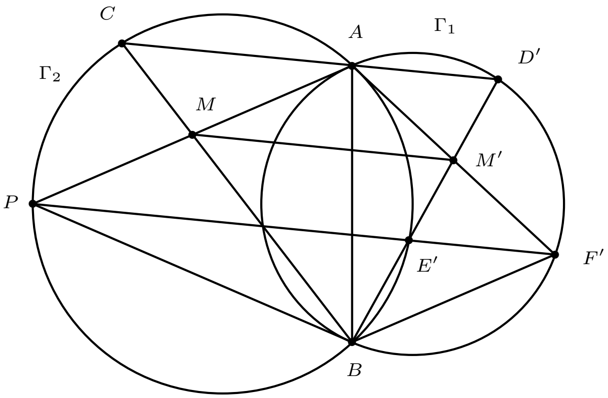
Como $\triangle PAC$ y $\triangle BFE$ tienen lados correspondientes paralelos, entonces son homotéticos con centro de homotecia la intersección de AF, BP y CE.

Solución 2

Sea F' un punto sobre Γ_1 tal que $\measuredangle PBA = \measuredangle ABF'$. Por ángulos semiinscritos tenemos $\measuredangle BF'A = \measuredangle BAP$; se sigue que $\triangle APB$ y $\triangle F'AB$ son semejantes. Sea M' el punto medio de AF'. De la semejanza anterior tenemos que $\triangle BPM$ es semejante a $\triangle BAM'$ y $\triangle BMA$ es semejante a $\triangle BM'F'$, en particular $\measuredangle MBA = \measuredangle M'BF'$. Si D' es la intersección de BM' con Γ_1, considerando los cuadriláteros cíclicos $PCAB$ y $AD'F'B$ se cumple que $\measuredangle PAC = \measuredangle PBC = \measuredangle PBM$ y $\measuredangle D'AF' = \measuredangle D'BF' = \measuredangle M'BF'$; entonces, por lo anterior y la semejanza entre $\triangle APB$ y $\triangle F'AB$, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\measuredangle PAC + \measuredangle BAP + \measuredangle F'AB + \measuredangle D'AF' \\
&\qquad = \measuredangle PBC + \measuredangle MBA + \measuredangle BAP + \measuredangle APB \\
&\qquad = \measuredangle PBA + \measuredangle BAP + \measuredangle APB \\
&\qquad = 180^\circ,
\end{aligned}$$

por lo que C, A y D' son colineales, de donde se sigue que $D = D'$.



Como $\triangle BPM$ y $\triangle BAM'$ son semejantes, tenemos $\measuredangle BMP = \measuredangle BM'A$, de donde se sigue que $BM'AM$ es cíclico y, por lo tanto, $\measuredangle MBA = \measuredangle MM'A$. Además, como $\measuredangle DAF' = \measuredangle MBA$, entonces $\measuredangle DAF' = \measuredangle MM'A$ y, por lo tanto, MM' es paralela a CD. Por otro lado, puesto que M y M' son puntos medios de AP y AF', por el Teorema de Thales tenemos que MM' es paralela a PF'. De esta forma CD, MM' y PF' son paralelas.

Sea E' la intersección de PF' con DB. Por las paralelas anteriores, considerando además que $BADF'$ es cíclico y por ángulos semiinscritos, tenemos que $\measuredangle BE'P = \measuredangle BDA = \measuredangle BF'A = \measuredangle BAP$. Entonces, $BE'AP$ es cíclico y, por lo tanto, $E' = E$ y $F' = F$.

Por ser $\triangle APB$ isósceles, tenemos que $\measuredangle BAP = \measuredangle ABP$, y de la semejanza de $\triangle APB$ y $\triangle FAB$ tenemos que $\measuredangle FBA = \measuredangle BAP$. Por lo tanto, $\measuredangle FBA = \measuredangle ABP$, de donde se sigue que BF y PA son paralelas.

Se demuestra que BD es paralela a PC como en la Solución 1 y se concluye de la misma forma.

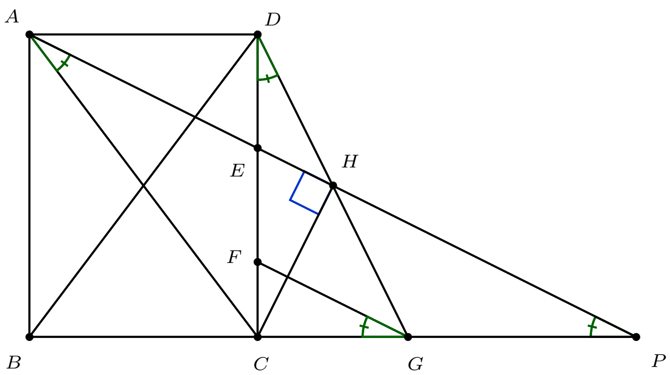
6.2. Segundo día

Problema 4. Sea $ABCD$ un rectángulo con diagonales AC y BD. Sean E el punto de intersección de la bisectriz del ángulo $\measuredangle CAD$ con el segmento CD, F el punto sobre el segmento CD, tal que E es punto medio de DF y G el punto sobre la recta BC, tal que $BG = AC$ (con C entre B y G). Muestra que la circunferencia que pasa por D, F y G es tangente a BG.

Solución 1

Para demostrar que la circunferencia que pasa por D, F y G es tangente a BG basta probar que $\measuredangle FGC = \measuredangle CDG$.

Sea P la intersección de AE con la prolongación de BC. Por ser AE bisectriz de $\measuredangle DAC$, entonces $\measuredangle DAE = \measuredangle EAC = \alpha$, además tenemos que $\measuredangle DAC = \measuredangle ACB = 2\alpha$. Como $\measuredangle ACB$ es un ángulo exterior de $\triangle ACP$, entonces $\measuredangle CAP + \measuredangle CPA = \measuredangle ACP$. Sustituyendo los valores conocidos tenemos que $\alpha + \measuredangle CPA = 2\alpha$, lo cual implica que $\measuredangle CPA = \alpha$. De donde $\triangle ACP$ es isósceles con $AC = CP$. Y como $BG = AC = CP$, entonces $BC + CG = CG + GP$, lo cual implica que $BC = GP = AD$.



Aplicando el Teorema de la Bisectriz a $\triangle ACD$, tenemos $\frac{AC}{AD} = \frac{CE}{ED}$, de donde $\frac{CP}{GP} = \frac{CE}{EF}$, por lo que

$$\frac{CG}{GP} = \frac{CP}{GP} - 1 = \frac{CE}{EF} - 1 = \frac{CF}{EF}.$$

Por el Teorema de Thales, se sigue que FG y EP son paralelas, por lo que $\measuredangle FGC = \measuredangle APC = \alpha$.

Por el criterio ALA, tenemos que $\triangle DAH$ y $\triangle GPH$ son congruentes, por lo que $AH = HP$. Y como $\triangle ACP$ es isósceles, entonces CH también es altura. Por lo tanto $\measuredangle ADC = 90° = \measuredangle AHC$ y, así, el cuadrilátero $ACHD$ es cíclico. Luego $\measuredangle CDH = \measuredangle CAH = \alpha = \measuredangle FGC$ como queríamos demostrar.

Solución 2

Sea M el punto medio de DG y E' la intersección de AM con DC. Como $\triangle GBD$ es isósceles, tenemos que BM es perpendicular a DG. Como

$\triangle DCG$ es rectángulo, tenemos que $CM = GM$. Por simetría, tenemos que $AM = MB$. Además, por construcción, tenemos que $AC = GB$. Esto muestra que $\triangle GMB$ y $\triangle CMA$ son congruentes. De esta congruencia y la simetría tenemos que

$$\measuredangle DAE' = \measuredangle GBM = \measuredangle CAE',$$

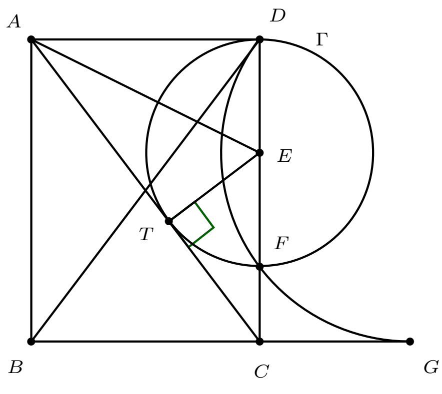
lo cual muestra que $E = E'$. También, de la congruencia tenemos que $\measuredangle AMC$ es recto. Como ADC también es recto, el cuadrilátero $ADMC$ es cíclico y por lo tanto $\measuredangle CDG = \measuredangle CAE$. Finalmente, como E es punto medio de DF y M es punto medio de DG, por el Teorema de Thales tenemos que EM es paralela a GF y, por lo tanto,

$$\measuredangle FGC = \measuredangle EAD = \measuredangle CAE = \measuredangle CDG.$$

Los extremos de esta igualdad nos dan la tangencia deseada.

Solución 3

Sea T el pie de la perpendicular desde E en el segmento AC. Por ser E un punto en la bisectriz del ángulo $\measuredangle CAD$, tenemos que los triángulos $\triangle ADE$ y $\triangle ATE$ son congruentes, por lo tanto $ED = ET$. Consideremos Γ la circunferencia de centro E y radio ED; por construcción, Γ interseca a DC en D y F. Por ser ET un radio de Γ perpendicular al segmento AC se cumple que Γ es tangente a AC en T, entonces, por potencia desde el punto C a Γ, tenemos que $CT^2 = CF \cdot CD$.

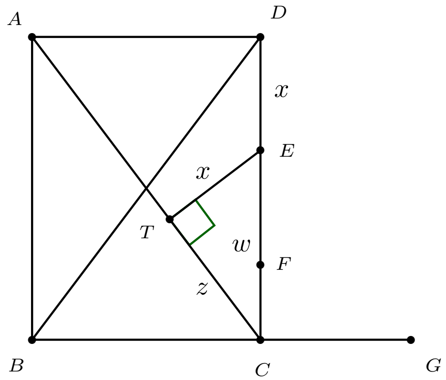


De la congruencia de $\triangle ADE$ y $\triangle ATE$ tenemos $TA = DA$, por lo tanto, $CT = CA - TA = CA - DA = GB - CB = GC$, entonces $CG^2 = CT^2 = CF \cdot CD$, de donde concluimos que CG es tangente a la circunferencia que pasa por los puntos D, F y G.

Solución 4

Sea T el pie de la perpendicular desde E en el segmento AC. Como AE es bisectriz de $\measuredangle CAD$ tenemos que $DE = ET = x$. Denotemos por $EC = w$ y $CT = z$, como en la solución anterior $CG = z$. Del triángulo rectángulo $\triangle TEC$ se deduce que

$$w^2 = x^2 + z^2.$$



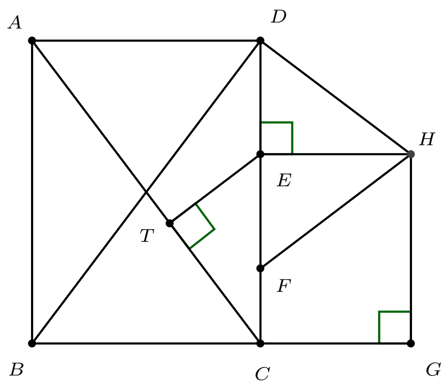
De lo anterior tenemos que $z^2 = (w - x)(w + x)$, entonces

$$CG^2 = CT^2 = z^2 = (w - x)(w + x) = (CE - EF)(CE + ED) = CF \cdot CD.$$

Con esto último, concluimos que la circunferencia que pasa por los puntos D, F y G es tangente a BG.

Solución 5

Sea H la intersección de la perpendicular a BG por G y la mediatriz de DF (la cual pasa por E). Denotemos por T al pie de la perpendicular desde E en el segmento AC. Tenemos que $ET = ED$ y $CT = CG$. Por construcción $HECG$ es un rectángulo, entonces $EH = CG$, de donde se sigue que $EH = TC$. Puesto que $\measuredangle HED = 90° = \measuredangle ETC$, por el criterio LAL se cumple que $\triangle HED$ y $\triangle CTE$ son congruentes, en particular $HD = CE$. Como $HECG$ es un rectángulo, tenemos que $CE = HG$, por lo tanto $HG = HD$ y HE es mediatriz del segmento DF, de donde se sigue que $HD = HF$. Luego, la circunferencia Γ de centro H y radio HD pasa por D, F y G.

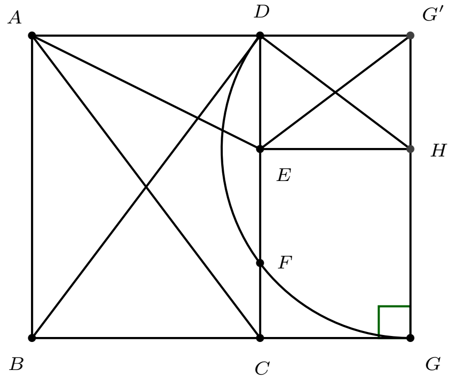


Al cumplirse que HG es un radio perpendicular de esta circunferencia al segmento BG, se tiene que BG es tangente a Γ.

Solución 6

Sea H como en la solución anterior. Denotemos por G' a la intersección de

GH con AD. Por construcción, $ABGG'$ es un rectángulo, entonces $BG = AG' = AC$.



Por ser AE bisectriz del ángulo $\measuredangle CAD$ y ser $\triangle G'AC$ un triángulo isósceles, se tiene que AE es mediatriz del segmento CG', de donde $G'E = EC$. Por construcción, $DEHG'$ es rectángulo, entonces $EG' = HD$ y, por lo tanto, $HD = EC$; de la misma manera, por ser $GHEC$ un rectángulo se tiene que $EC = HG$.

Con todo lo anterior, se cumple que $HG = HD = HF$, por lo tanto, la circunferencia Γ con centro H y radio HD pasa por los puntos D, F y G. Al cumplirse que HG es un radio perpendicular de esta circunferencia al segmento BG, tenemos que BG es tangente a Γ.

Solución 7

Denotemos por $DC = a$, $AC = c$ y $AD = b$. Por el Teorema de la Bisectriz en $\triangle DAC$ con la bisectriz AE, tenemos que

$$\frac{CE}{ED} = \frac{c}{b},$$

que es equivalente a:

$$\frac{a}{ED} = \frac{DC}{ED} = \frac{CE}{ED} + 1 = \frac{c}{b} + 1 = \frac{c+b}{b}.$$

Por lo tanto, $ED = \frac{ab}{c+b}$, de donde

$$CF = CD - 2DE = a - 2\frac{ab}{c+b} = a\frac{c-b}{c+b}.$$

Por construcción, $BG = AC$, entonces $BG = c$ por ser $ABCD$ rectángulo, además $AD = BC = b$, por lo tanto $CG = c - b$. Con esto tenemos que $CG^2 = CF \cdot CD$ es equivalente a mostrar que

$$(c-b)^2 = a^2\frac{c-b}{c+b},$$

es decir,

$$c^2 - b^2 = a^2.$$

Esta última relación es cierta por ser a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo, por lo tanto $CG^2 = CF \cdot CD$, de donde concluimos el resultado.

Problema 5. Sean a, b y c números reales positivos tales que $a+b+c=3$. Muestra que

$$\frac{a^2}{a+\sqrt[3]{bc}}+\frac{b^2}{b+\sqrt[3]{ca}}+\frac{c^2}{c+\sqrt[3]{ab}} \geq \frac{3}{2},$$

y determina cuándo se da la igualdad.

Solución 1

Al utilizar la Desigualdad Útil tenemos

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{a+\sqrt[3]{bc}}+\frac{b^2}{b+\sqrt[3]{ca}}+\frac{c^2}{c+\sqrt[3]{ab}} &\geq \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)+\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{ca}+\sqrt[3]{ab}}\\ &= \frac{9}{3+\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{ca}+\sqrt[3]{ab}}.\end{aligned}$$

Por otro lado, utilizando la relación entre la Media Geométrica-Media Aritmética,

$$\begin{aligned}\frac{1+b+c}{3} &\geq \sqrt[3]{bc},\\ \frac{1+c+a}{3} &\geq \sqrt[3]{ca},\\ \frac{1+a+b}{3} &\geq \sqrt[3]{ab}.\end{aligned}$$

Luego, sumando estas desigualdades, tenemos

$$3=\frac{3+2(a+b+c)}{3} \geq \sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{ca}+\sqrt[3]{ab},$$

de donde $6 \geq 3+\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{ca}+\sqrt[3]{ab}$. Por lo tanto

$$\frac{1}{3+\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{ca}+\sqrt[3]{ab}} \geq \frac{1}{6}.$$

Considerando la primera desigualdad obtenida tenemos

$$\frac{a^2}{a+\sqrt[3]{bc}}+\frac{b^2}{b+\sqrt[3]{ca}}+\frac{c^2}{c+\sqrt[3]{ab}} \geq \frac{9}{3+\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{ca}+\sqrt[3]{ab}} \geq \frac{9}{6}=\frac{3}{2}.$$

Para que la igualdad ocurra, por la relación Media Geométrica-Media Aritmética, necesitamos que $b=c=1$, $c=a=1$ y $a=b=1$, respectivamente en cada relación, por lo que $a=b=c=1$ son los números en donde se obtiene la igualdad.

Solución 2
Por la relación entre la Media Geométrica-Media Aritmética, tenemos que $\sqrt[3]{bc} \leq \frac{1+b+c}{3}$. Notemos que, en general, $\frac{xy}{x+y} \leq \frac{x+y}{4}$. Por lo tanto,

$$\frac{a\sqrt[3]{bc}}{a+\sqrt[3]{bc}} \leq \frac{a+\sqrt[3]{bc}}{4} \leq \frac{a+\frac{1}{3}(b+c+1)}{4} = \frac{3a+b+c+1}{12}.$$

De esta forma

$$\frac{a^2}{a+\sqrt[3]{bc}} = a - \frac{a\sqrt[3]{bc}}{a+\sqrt[3]{bc}} \geq a - \frac{3a+b+c+1}{12}.$$

De manera semejante podemos obtener las relaciones

$$\begin{aligned} \frac{b^2}{b+\sqrt[3]{ca}} &\geq b - \frac{3b+c+a+1}{12}, \\ \frac{c^2}{c+\sqrt[3]{ab}} &\geq c - \frac{3c+a+b+1}{12}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} &\frac{a^2}{a+\sqrt[3]{bc}} + \frac{b^2}{b+\sqrt[3]{ca}} + \frac{c^2}{c+\sqrt[3]{ab}} \\ &\geq \left(a - \frac{3a+b+c+1}{12}\right) + \left(b - \frac{3b+c+a+1}{12}\right) \\ &\quad + \left(c - \frac{3c+a+b+1}{12}\right) \\ &= a+b+c - \frac{5(a+b+c)+3}{12} \\ &= 3 - \frac{5\cdot 3+3}{12} \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Para la igualdad se usa el mismo argumento que en la Solución 1.

Problema 6. Para cada entero positivo n, sea $d(n)$ la cantidad de divisores positivos de n. Por ejemplo, los divisores de 6 son 1, 2, 3 y 6, por lo que $d(6) = 4$. Encuentra todos los enteros positivos n tales que

$$n + d(n) = d(n)^2.$$

Solución 1
Para simplificar la notación, usaremos simplemente d en vez de $d(n)$. Como $n = d(d-1)$ y $\text{mcd}(d, d-1) = 1$, entonces para los primos p que dividan a d tenemos que el número de veces que p aparece en d es el mismo que de n. Por esta razón, n no puede ser un cuadrado perfecto y, además, debe ser un número par.

Sea $n = 2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ donde $\alpha_i \geq 0$. Como $n < d^2$, se tiene que

$$\frac{2^{\alpha_1}}{(\alpha_1+1)^2}\cdot\frac{3^{\alpha_2}}{(\alpha_2+1)^2}\cdots\frac{p_k^{\alpha_k}}{(\alpha_k+1)^2} = ABC < 1,$$

donde A es el primer factor, B el segundo y C el producto de los factores restantes. Observemos que $A \geq \frac{1}{2}$ si $\alpha_1 \neq 2$, $B \geq 1$ si $\alpha_2 \geq 2$, y $C \geq 1$. Si $\alpha_1 = 2$ entonces $A = \frac{4}{9}$ y si $\alpha_2 = 1$ entonces $B = \frac{3}{4}$.

Luego, el valor mínimo de AB es $\left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{3}$ y se alcanza para $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$. Esto implica que $\alpha_i \leq 1$ para $i \geq 4$ y $\alpha_3 \leq 2$ ya que $\frac{7^2}{(2+1)^2} > 3$ y $\frac{5^3}{(3+1)^2} > 3$. Además

$$\frac{5}{(1+1)^2}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{11}{4} > 3,$$

por lo que aparecen a lo más dos primos mayores o iguales a 5.

Ahora, si $\alpha_3 = 2$, se tiene que

$$\frac{5^2}{(2+1)^2}\cdot\frac{4}{9} > 1,$$

de modo que A no es suficiente para compensar la desigualdad y, por lo tanto, necesitamos $\alpha_2 = 1$, pero

$$\frac{25}{9}\cdot\frac{3}{4} = \frac{75}{36} > 2,$$

así que B tampoco es suficiente para compensar y, por lo tanto, $\alpha_2 = 2$. No obstante, el tener 2^2 y 5^2 en la factorización de n implica que $(2+1)(2+1) = 3^2$ aparece en la factorización de d y, por consiguiente, en la de n, contradiciendo que $\alpha_2 = 1$. Este argumento nos permite concluir que $\alpha_i \leq 1$ para toda $i \leq 3$.

Mostraremos ahora que $\alpha_2 \leq 2$. Descartamos $\alpha_2 \geq 4$, pues $\frac{4}{9}\cdot\frac{3^4}{5^2} > 1$. Si $\alpha_2 = 3$, entonces aparece un $3+1 = 4$ en la factorización de d y, por lo tanto, en la de n, de donde $\alpha_1 \geq 2$. Si $\alpha_1 = 2$, entonces aparece un $2+1 = 3$ en la factorización de d y, por la observación hecha anteriormente, debe aparecer un 3^2 en d, pero ya no hay exponentes α que puedan colaborar con factores 3, pues para $i \geq 3$ se tiene $\alpha_i \leq 1$. Si $\alpha_1 = 3$, entonces aparece otro 4 en la factorización de d, llevando a la contradicción $\alpha_1 \geq 4$. Finalmente, $\alpha_1 \geq 4$ es imposible pues $\frac{2^4}{5^2}\cdot\frac{3^3}{4^2} = \frac{27}{25} > 1$. Con esto probamos que $\alpha_2 \leq 2$.

Como $\alpha_2 \leq 2$ y después de 5 a lo más dos primos aparecen en n, entonces estos exponentes α $(p \geq 3)$ solo generan a lo más tres factores 2.

Notemos que $\alpha_1 < 7$ pues $\frac{3}{4}\cdot\frac{2^7}{8^2} > 1$. Como $\alpha_1 < 7$, entonces 2^{α_1} genera en d a lo más dos factores 2 (para $\alpha_1 = 3$) y los otros exponentes generan a lo más otros tres factores 2. Esto muestra que $\alpha_1 = 4, 5, 6$ son imposibles. Con esto tenemos que todos los exponentes de n son menores o iguales a 3. Por lo tanto, los únicos primos en d son 2 y 3, es decir, $d = 2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}$ con $\alpha_1 = 1, 2, 3$ y $\alpha_2 = 0, 1, 2$.

Vemos que los únicos casos posibles son: $\alpha_2 = 0$ y $\alpha_1 = 1$, por lo que $n = 2$; también tenemos $\alpha_2 = 0$ y $\alpha_1 = 3$, de donde $n = 56$; otro caso es $\alpha_2 = 1$ y $\alpha_1 = 2$, con lo que $n = 132$; finalmente $\alpha_2 = 2$ y $\alpha_1 = 2$, lo que implica que $n = 1260$.

Solución 2
Consideremos la ecuación

$$d(m(m-1)) = m,$$

a la cual llamaremos nueva ecuación. Si n es solución del problema original, entonces $m = d(n)$ es solución de la nueva ecuación, y si m es solución de la nueva ecuación, entonces $n = m(m-1)$ es solución del problema original. Entonces, buscaremos las soluciones de la nueva ecuación.

La idea es usar la desigualdad $d(k) \leq \sqrt{k}$, lo cual es válido a partir de cierto k. Observemos que si m es solución de la nueva ecuación, m tiene que ser par, porque si es impar, el lado izquierdo de la ecuación sería par y el lado derecho impar, ya que $m(m-1)$ no es un cuadrado perfecto.

Consideremos la función f definida en los enteros positivos como

$$f(k) = \frac{d(k)^2}{k}.$$

Si m es tal que $f(m(m-1)) \leq 1$ se tendría que $d(m(m-1)) \leq \sqrt{m(m-1)} < m$, por lo que m no es solución. Notemos que si a y b son enteros primos relativos, $f(ab) = f(a)f(b)$. En particular, si $k = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ es la descomposición como producto de primos de k, entonces $f(k) = f(p_1^{\alpha_1}) \cdots f(p_r^{\alpha_r})$. Observemos que las únicas potencias de primos p^α que cumplen que $1 < f(p^\alpha)$ son $2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$ y 3.

$$f(2) = 2, f(2^2) = \frac{9}{4}, f(2^3) = 2, f(2^4) = \frac{5^2}{2^4}, f(2^5) = \frac{9}{8}, f(3) = \frac{4}{3}.$$

De lo anterior, podemos ver que $f(k) \leq 3$ para cualquier $k > 0$. Supongamos que m es solución y sea p el mayor primo que divide a m. Supongamos que $p \geq 7$; como p divide a $m = d(m(m-1))$, hay un primo en $m(m-1)$ cuyo exponente es al menos $p-1$. Sea q tal primo; si $q = p$ tendríamos $m(m-1) = p^s k$, con $\operatorname{mcd}(k,p) = 1$ y $p - 1 \leq s$, entonces

$$f(m(m-1)) = f(p^s)f(k) \leq f(7^6) \cdot 3 < 1,$$

así que m no sería solución. Entonces $q \neq p$, por lo que $m = q^s p^r k$, con $\operatorname{mcd}(pq, k) = 1$. Si $q \geq 3$, entonces

$$f(m(m-1)) = f(q^s)f(p^r)f(k) \leq f(2^6)f(7) \cdot 3 = \frac{7^2 \cdot 2^2}{3^6 \cdot 7} \cdot 3 < 1,$$

lo cual no es posible. Si $q = 2$, k no es divisible por 2 y, entonces, $f(k) \leq f(3) = \frac{4}{3}$, y así

$$f(m(m-1)) \leq f(2^6)f(7) \cdot \frac{4}{3} < 1.$$

Entonces $p \leq 5$. Analicemos los casos $p = 5$, $p = 3$ y $p = 2$.

Caso 1 ($p = 5$). En este caso $m = 2^a 3^b 5^c$. Si $c \geq 2$, entonces 5^2 divide a $d(m(m-1))$ y pueden pasar dos cosas: un primo aparece con exponente al menos 24, pero entonces $f(m) < 1$, o hay al menos dos primos $p_1 < p_2$ con exponente al menos 4, en tal caso escribimos $m(m-1) = p_2^s \cdot k$. Como $p_2 \geq 3$,

$$f(m(m-1)) \leq f(3^4)f(k) \leq \frac{5^2}{3^4} \cdot 3 < 1.$$

Entonces $c = 1$ y hay un primo con exponente a menos 4 en $m(m-1)$. Se puede ver que ese primo debe ser 2, de lo contrario $f(m(m-1)) \leq 1$. Ahora, $m = 2^4 \cdot 3^b \cdot 5$. Observemos que si m es múltiplo de 3, como también es par, $m-1$ no tiene factores 3 ni 2 y entonces $f(m-1) \leq 1$, por lo tanto $f(m(m-1)) \leq f(m)$. Supongamos que $b \geq 3$:

$$f(m(m-1)) \leq f(m) \leq f(2^4)f(3^3)f(5) = \frac{20}{27} < 1.$$

Entonces, solo falta probar $b \in \{0, 1, 2\}$, pero ninguno produce una solución.

Caso 2 ($p = 3$). Tenemos $m = 2^a 3^b$ y queremos $2^a 3^b = (a+1)(b+1)d(m-1)$, entonces $a+1$ y $b+1$ son de la forma $2^\alpha 3^\beta$. Los primeros números que tienen tal condición son $2, 3, 4$ y 6. Si $b+1 \geq 6$,

$$f(m(m-1)) \leq f(m) \leq f(2^a)f(3^5) \leq 1,$$

entonces $b+1 \in \{2, 3, 4\}$. Supongamos que $b = 3$. Si $a+1 \geq 6$

$$f(m(m-1)) \leq f(m)f(2^5)f(3^3) = \frac{2}{3} < 1,$$

entonces $a+1 \in \{2, 3, 4\}$. Revisando estos tres casos se ve que ninguno produce una solución. Si $b = 2$, entonces

$$f(m(m-1)) \leq f(m) \leq f(2^a)f(3^2) = f(2^a),$$

por lo tanto $a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Solo $a = 2$ nos da una solución, $m = 36$.

Si $b = 1$, $m = 2^a \cdot 3$. Hay dos opciones: 3 divide a $a+1$ o $a+1$ es potencia de 2. En la primera, $a+1 = 2^s \cdot 3$, si $s = 0$ encontramos la solución $m = 12$; si $s = 1$, m no es solución y si $s \geq 2$, $f(m(m-1)) \leq f(m) \leq 1$. Si $a+1 = 2^s$, la desigualdad $f(m(m-1)) > 1$ se cumple solo para $s = 1$ y $s = 2$, pero en ninguno de estos dos casos m es solución.

Caso 3 ($p = 2$). En este caso, $m = 2^a$ y queremos $2^a = (a+1)d(m-1)$, entonces $a+1 = 2^s$ para algún $s \geq 1$. Como a es impar, 3 no divide a $m-1$ y, entonces, $f(m-1) \leq 1$. Como $f(m(m-1)) \leq f(m)$, necesitamos que $1 \leq f(m)$. Podemos ver que esta desigualdad se cumple solo para $s = 1$ y $s = 2$, lo cual da $m = 2$ y $m = 8$, respectivamente, que sí son soluciones.

En conclusión, las soluciones de la nueva ecuación son $2, 8, 12$ y 36; entonces, las soluciones n del problema original son $2, 56, 132$ y 1260.

Capítulo 7

Definiciones y resultados básicos

7.1. Geometría

7.1.1. Ángulos

Definición 1. Un **ángulo** es la abertura formada por dos semirrectas con un mismo origen llamado vértice.

Un **ángulo recto** es aquel que mide $90°$.

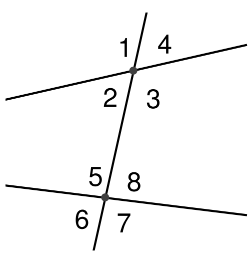
Dos ángulos son **complementarios** y cada uno es el complemento del otro cuando su suma es igual a $90°$.

Dos ángulos son **suplementarios** y cada uno es el suplemento del otro cuando su suma es igual a $180°$.

Dos ángulos son **opuestos por el vértice** cuando los lados de uno son las prolongaciones de los del otro.

Dos ángulos son **adyacentes** cuando tienen un mismo vértice y un lado común y son exteriores el uno al otro.

Cuando una recta se interseca con otra diferente se forman dos parejas de ángulos opuestos iguales. En un sistema de dos rectas cortadas por una secante o transversal, se pueden clasificar los ángulos de acuerdo a la posición que ocupan con respecto a los sistemas adyacentes.



Correspondientes
1, 5
2, 6
3, 7
4, 8

Alternos	Colaterales	
2, 8	2, 5	Internos
3, 5	3, 8	
1, 7	1, 6	Externos
4, 6	4, 7	

Dos rectas que se encuentran en el mismo plano son **paralelas** si no se cortan.

Teorema 1. En todo sistema de dos rectas paralelas cortadas por una secante se tiene que:

1. Los ángulos correspondientes son iguales.
2. Los ángulos alternos son iguales.
3. Los ángulos colaterales son suplementarios.

Definición 2. Un triángulo que tiene sus tres ángulos interiores agudos, es decir menores de $90°$, se llama **acutángulo**.

Un **triángulo rectángulo** es aquel que tiene un ángulo interior recto, es decir, de $90°$.

Un triángulo que tiene un ángulo obtuso, es decir mayor de $90°$, se llama **obtusángulo**.

Un triángulo que tiene dos de sus lados iguales se llama **isósceles**.

Un triángulo que tiene sus tres lados iguales se llama **equilátero** y es un caso particular de un triángulo isósceles.

Un triángulo que no tiene ningún par de lados iguales se llama **escaleno**.

Corolario 2. La suma de los tres ángulos interiores de cualquier triángulo es igual a $180°$.

Definición 3. Un **ángulo exterior** de un triángulo es el formado por un lado del triángulo y la prolongación de otro.

Corolario 3. En todo triángulo cada ángulo exterior es igual a la suma de los dos interiores que no le son adyacentes, es decir, los que le son opuestos.

La suma de los tres ángulos exteriores (uno en cada vértice) de cualquier triángulo es igual a $360°$.

7.1.2. Semejanza de triángulos

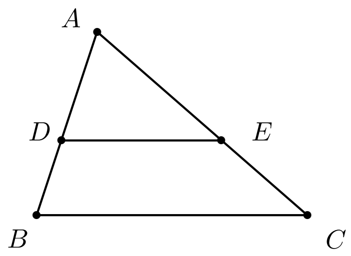
El área de un triángulo $\triangle ABC$ está determinada por las medidas de su base y altura:

$$(\triangle ABC) = \frac{\text{Base} \cdot \text{Altura}}{2}.$$

Proposición 1. Si dos triángulos tienen un par de bases iguales, entonces la razón entre sus áreas es igual a la razón entre las alturas correspondientes.

Proposición 2. Si dos triángulos tienen un par de alturas iguales, entonces la razón entre sus áreas es igual a la razón entre las bases correspondientes.

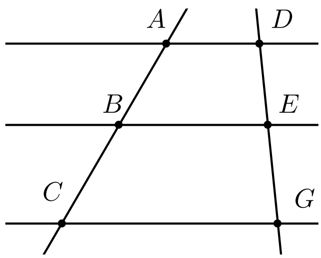
Teorema 4. (Primer Teorema de Thales) Si una recta paralela a uno de los lados de un triángulo corta a los otros lados, entonces los segmentos formados son proporcionales.



Lo que nos dice este resultado es que para un triángulo cualquiera $\triangle ABC$, si D y E son puntos en AB y AC, respectivamente, tales que DE es paralelo a BC, entonces se tienen las siguientes relaciones entre los segmentos:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC},$$
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC},$$
$$\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}.$$

Teorema 5. (Segundo Teorema de Thales) Si tres o más paralelas son cortadas por cualesquiera dos transversales, entonces los respectivos segmentos que las paralelas determinan en estas últimas rectas son proporcionales.

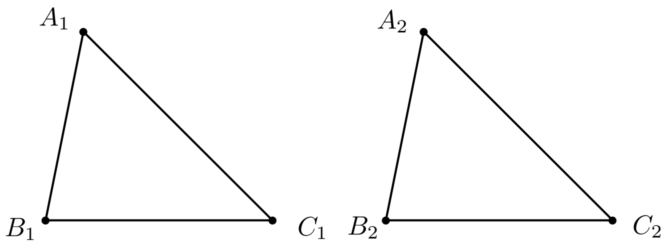


En este caso, si AD, BE y CG son paralelas, entonces se cumplen las siguientes condiciones:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DG},$$
$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EG},$$
$$\frac{AC}{BC} = \frac{DG}{EG}.$$

Definición 4. Dos triángulos $\triangle A_1B_1C_1$ y $\triangle A_2B_2C_2$ se llaman **congruentes** o **iguales** si y sólo si tanto sus lados como sus ángulos correspondientes son iguales, es decir:

$$\begin{aligned} A_1B_1 &= A_2B_2, \\ B_1C_1 &= B_2C_2, \\ A_1C_1 &= A_2C_2, \\ \measuredangle A_1 &= \measuredangle A_2, \\ \measuredangle B_1 &= \measuredangle B_2, \\ \measuredangle C_1 &= \measuredangle C_2. \end{aligned}$$



Para indicar que los triángulos $\triangle A_1B_1C_1$ y $\triangle A_2B_2C_2$ son congruentes, lo haremos de la siguiente manera

$$\triangle A_1B_1C_1 \simeq \triangle A_2B_2C_2.$$

Criterios de Congruencia
Para que $\triangle A_1B_1C_1 \simeq \triangle A_2B_2C_2$ es suficiente que se cumpla una de las siguientes tres condiciones:

(ALA) Dos ángulos iguales e igual la pareja de lados comprendidos entre los ángulos, por ejemplo:

$$\measuredangle A_1 = \measuredangle A_2, A_1B_1 = A_2B_2 \text{ y } \measuredangle B_1 = \measuredangle B_2.$$

(LAL) Dos parejas de lados iguales e igual el ángulo comprendido entre ellos, por ejemplo:

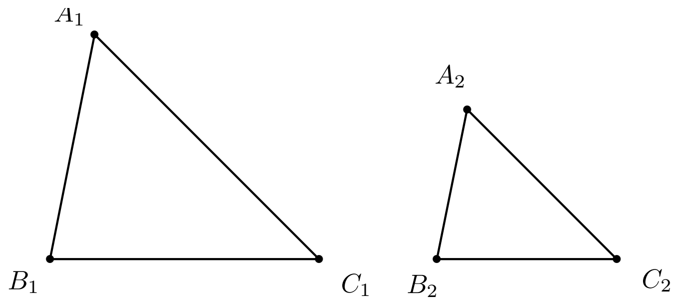
$$A_1B_1 = A_2B_2, \measuredangle B_1 = \measuredangle B_2 \text{ y } B_1C_1 = B_2C_2.$$

(LLL) Las tres parejas de lados iguales:

$$A_1B_1 = A_2B_2, B_1C_1 = B_2C_2 \text{ y } A_1C_1 = A_2C_2.$$

Definición 5. Dos triángulos $\triangle A_1B_1C_1$ y $\triangle A_2B_2C_2$ son **semejantes** si y sólo si los ángulos correspondientes son iguales y los lados correspondientes son proporcionales, es decir, si cumplen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \measuredangle A_1 &= \measuredangle A_2, \\ \measuredangle B_1 &= \measuredangle B_2, \\ \measuredangle C_1 &= \measuredangle C_2, \\ \tfrac{A_1B_1}{A_2B_2} &= \tfrac{B_1C_1}{B_2C_2} = \tfrac{A_1C_1}{A_2C_2}. \end{aligned}$$



Para indicar que los triángulos $\triangle A_1B_1C_1$ y $\triangle A_2B_2C_2$ son semejantes, lo haremos de la siguiente manera:

$$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2.$$

Criterios de Semejanza

Para que $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$ es suficiente que se cumpla una de las tres condiciones siguientes:

(AA) Dos ángulos iguales, por ejemplo

$$\measuredangle A_1 = \measuredangle A_2 \text{ y } \measuredangle B_1 = \measuredangle B_2.$$

(LAL) Dos parejas de lados proporcionales e igual el ángulo comprendido entre ellos, por ejemplo:

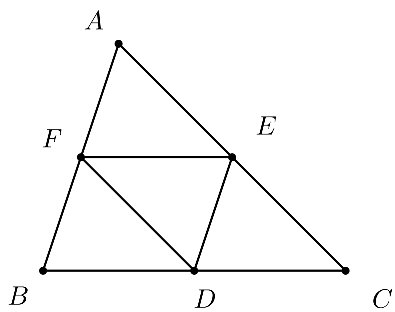
$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} \text{ y } \measuredangle B_1 = \measuredangle B_2.$$

(LLL) Las tres parejas de lados proporcionales:

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2}.$$

Proposición 3. El segmento que une los puntos medios de cualesquiera dos lados de un triángulo arbitrario mide la mitad del tercer lado y es paralelo a dicho lado.

Definición 6. El triángulo formado por los puntos medios de los lados de un triángulo dado se llama el **triángulo medial**.



Corolario 6. El triángulo medial de cualquier triángulo es siempre semejante a este y su área es una cuarta parte del área del triángulo original.

Proposición 4. La altura trazada desde el vértice correspondiente al ángulo recto en un triángulo rectángulo divide a este en dos triángulos semejantes al original.

Teorema 7. (Teorema de Pitágoras) En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. Es decir, si $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo con ángulo recto en A, entonces

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

7.1.3. Paralelogramos

Definición 7. Un **paralelogramo** es un cuadrilátero en el que cada lado es paralelo a su opuesto.

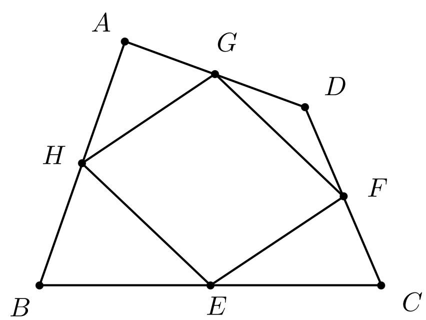
Proposición 5. Para todo paralelogramo se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. Los lados opuestos son iguales.
2. Los ángulos opuestos son iguales y los ángulos consecutivos son suplementarios.
3. Las diagonales se cortan en su punto medio.

Teorema 8. (Ley del Paralelogramo) La suma de los cuadrados de los cuatro lados de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de las diagonales. Es decir, si $ABCD$ es un paralelogramo, entonces

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2.$$

Teorema 9. (Teorema de Varignon) Los puntos medios de los lados de un cuadrilátero no cruzado determinan un paralelogramo. El perímetro del paralelogramo es igual a la suma de las longitudes de las diagonales y su área es igual a la mitad del área del cuadrilátero.



7.1.4. Puntos y rectas en los triángulos

Definición 8. Una **mediana** en un triángulo es un segmento trazado del punto medio de un lado al vértice opuesto.

Una **altura** en un triángulo es un segmento perpendicular a un lado o a su prolongación que va al vértice opuesto.

La **bisectriz** de un ángulo es la recta que lo divide en dos ángulos iguales. En particular, una bisectriz en un triángulo es una línea que sale de un vértice y divide al ángulo interior en dos partes iguales.

La **mediatriz** de un segmento es la recta que pasa por el punto medio y es perpendicular a dicho segmento. En particular, una mediatriz en un triángulo es una línea que pasa por el punto medio de un lado y es perpendicular a él.

Proposición 6. En un triángulo isósceles una misma línea hace todos las funciones de mediana, altura, mediatriz y bisectriz, correspondientes al ángulo formado por los lados iguales.

Teorema 10. (Teorema de la Bisectriz) La bisectriz de cualquier ángulo interior de un triángulo determina, en el lado opuesto, dos segmentos proporcionales a los respectivos lados que forman el ángulo considerado. Es decir, si en $\triangle ABC$ la bisectriz del ángulo $\measuredangle BAC$ corta a BC en un punto P interior del segmento, entonces

$$\frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AC}.$$

Teorema 11. (Teorema de la Bisectriz Exterior) Si la bisectriz de un ángulo exterior de un triángulo interseca al lado opuesto al ángulo, determinará dos segmentos proporcionales a los respectivos lados que forman el ángulo considerado. Es decir, si en $\triangle ABC$ la bisectriz del ángulo $\measuredangle BAC$ corta a BC en un punto P en la extensión del segmento, entonces

$$\frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AC}.$$

Teorema 12. Si un triángulo es isósceles, entonces tiene dos ángulos iguales, los ángulos opuestos a los lados iguales.

Teorema 13. (Teorema de Lehmus-Steiner) Si un triángulo tiene dos ángulos interiores diferentes, entonces las bisectrices correspondientes son diferentes y al ángulo menor le corresponde la bisectriz mayor.

En consecuencia, si en un triángulo dos de las bisectrices son iguales, entonces sus ángulos correspondientes son iguales; en particular, el triángulo es isósceles.

Teorema 14. Si en un triángulo una misma línea hace a la vez dos de las funciones siguientes:

- mediatriz,
- altura,
- bisectriz,

- mediana,

relativas a un mismo lado, entonces el triángulo es isósceles, siendo su base dicho lado, y, además, la línea hace las otras dos funciones.

Definición 9. **La distancia de un punto a una recta** es la magnitud del segmento determinado por el punto y el pie del punto en la recta.

Proposición 7. El lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de cada lado de un ángulo fijo es la bisectriz del ángulo.

Proposición 8. El lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de dos puntos fijos distintos pertenecientes al mismo plano es la mediatriz del segmento determinado por estos puntos.

Definición 10. Cuando un conjunto de rectas se intersecan en un solo punto decimos que son **concurrentes**.

Teorema 15. Para un triángulo cualquiera se cumplen las siguientes afirmaciones:

- Las tres medianas son concurrentes.
- Las bisectrices de los tres ángulos interiores son concurrentes.
- Las tres mediatrices son concurrentes.
- Las tres alturas son concurrentes.

Definición 11. Al punto de intersección G de las tres medianas de un triángulo $\triangle ABC$ le llamaremos **gravicentro** . Este punto también es conocido como **centroide**, **baricentro** o **centro de gravedad**.

Al punto I en donde concurren las tres bisectrices de un triángulo $\triangle ABC$ le llamaremos **incentro**, que es el centro de la circunferencia tangente interiormente a cada uno de los lados de $\triangle ABC$; dicha circunferencia se llama el **incírculo** de $\triangle ABC$ y el radio de dicha circunferencia se llama el **inradio**.

El punto O en donde se intersecan las mediatrices de un triángulo $\triangle ABC$ le llamaremos **circuncentro**, que es el centro de la circunferencia que pasa por los tres vértices de $\triangle ABC$; dicha circunferencia se llama el **circuncírculo** de $\triangle ABC$ y el radio de dicha circunferencia se llama el **circunradio**.

El punto H en donde concurren las tres alturas de un triángulo $\triangle ABC$ le llamaremos **ortocentro**.

Proposición 9. En un triángulo cualquiera las bisectrices de dos ángulos exteriores y la del tercero interior son concurrentes.

Teorema 16. (Teorema de Stewart) Sea P un punto en el lado BC del triángulo $\triangle ABC$. Si $x = BP$ y $y = PC$, entonces

$$a(AP^2 + xy) = xb^2 + yc^2.$$

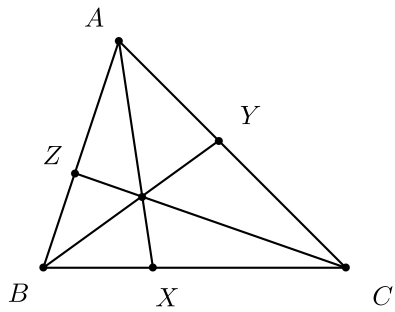
Teorema 17. (Fórmula de Herón) El área de un triángulo $\triangle ABC$ en términos de la longitud de sus lados $a = BC$, $b = AC$ y $c = AB$ está dada por la fórmula:

$$(\triangle ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

en donde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ es el semiperímetro de $\triangle ABC$.

Teorema 18. (Teorema de Ceva) Sean X, Y y Z puntos en los lados BC, CA y AB de un triángulo $\triangle ABC$, de modo que ninguno de estos puntos coincide con algún vértice del triángulo. Las cevianas AX, BY y CZ son concurrentes si y sólo si

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1.$$



Definición 12. Dados dos puntos A y B le podemos asignar un sentido al segmento determinado por ellos, por ejemplo de A a B o viceversa; decimos entonces que el segmento $\overline{AB}$ es un **segmento dirigido** que va del extremo A al extremo B. El mismo segmento recorrido del extremo B al extremo A será el segmento dirigido $\overline{BA}$ y la relación entre estos dos está determinada por la ecuación

$$\overline{AB} = -\overline{BA},$$

o en otras palabras

$$\overline{AB} + \overline{BA} = 0.$$

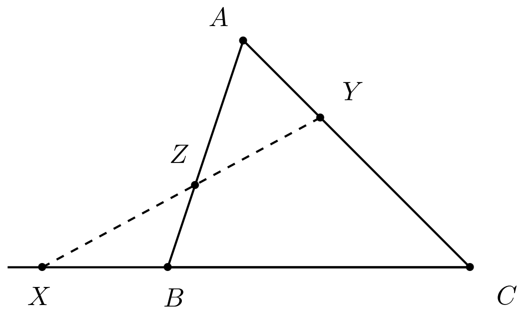
De forma general el comportamiento de segmentos dirigidos estará regido por la **Relación de Chasles** , la cual establece que:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

para cualquier posición de tres puntos A, B y C en una recta.

Teorema 19. (Teorema de Menelao) Sean X, Y y Z puntos en los lados BC, CA y AB de un triángulo $\triangle ABC$, de modo que ninguno de estos puntos coincide con algún vértice del triángulo. Los puntos X, Y y Z son colineales si y sólo si

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = -1.$$



7.1.5. Ángulos en las circunferencias

Definición 13. Un **ángulo central** es el formado por dos radios en una circunferencia. Por lo tanto, dados dos puntos A y B en una circunferencia, el ángulo central $\measuredangle AOB$ es el que tiene su vértice en el centro O de la circunferencia y sus lados son los radios OA y OB.

El arco correspondiente es el que se encuentra entre los lados del ángulo central $\overset{\frown}{AB} = \measuredangle AOB$.

Todo ángulo central mide la medida angular del arco que abraza.

Un **ángulo inscrito** es el formado por dos cuerdas que tienen un extremo en común. Por lo tanto, dados tres puntos A, B y P en una circunferencia, el ángulo inscrito $\measuredangle APB$ es el ángulo que tiene su vértice P en la circunferencia y sus lados PA y PB son secantes.

Todo ángulo inscrito mide la mitad del arco que abraza.

Proposición 10. Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia, subtendido por el diámetro, es recto.

Dos ángulos inscritos en una misma circunferencia y que abracen una misma cuerda son iguales si sus vértices están del mismo lado de la cuerda; y son suplementarios si sus vértices están en lados opuestos respecto de la cuerda.

Definición 14. Un **ángulo semiinscrito** está formado por una cuerda y una tangente que se intersecan en el punto de tangencia. De esta manera, un ángulo semiinscrito es aquel que tiene su vértice en la circunferencia, uno de sus lados es tangente y el otro secante.

Proposición 11. La medida del ángulo semiinscrito es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados.

Proposición 12. Si dos rectas paralelas intersecan a una circunferencia, entonces los arcos determinados entre ellas son iguales.

Definición 15. Un **ángulo exterior** es el formado por dos rectas secantes, o por una secante y una tangente, o por dos tangentes que se intersecan en un punto exterior a una circunferencia y que cortan a la circunferencia en 4, 3 o 2 puntos, respectivamente.

Proposición 13. Todo ángulo exterior a una circunferencia mide la semidiferencia de los arcos comprendidos entre sus lados.

Definición 16. Un **ángulo interior** en una circunferencia es el formado por dos cuerdas de la circunferencia que se cortan en un punto interior.

Proposición 14. Un ángulo interior en una circunferencia mide la semisuma de las medidas de los arcos comprendidos por sus lados y por sus prolongaciones.

7.1.6. Cuadriláteros cíclicos

Definición 17. Diremos que un conjunto de puntos es **concíclico** si todos los puntos del conjunto se encuentran en una misma circunferencia.

Teorema 20. (Conciclicidad de Cuatro Puntos) Sean A, B, P y Q cuatros puntos en el plano, cada tres de ellos no colineales. Si los puntos P y Q están en un mismo semiplano determinado por la recta AB y desde ellos se ve el segmento AB bajo ángulos iguales, o bien si los puntos P y Q están en distintos semiplanos determinados por la recta AB y desde ellos se ve el segmento AB bajo ángulos suplementarios, entonces los puntos A, B, P y Q son concíclicos.

Definición 18. Se dice que un polígono es **cíclico** o **inscriptible** si sus vértices son concíclicos.

Un cuadrilátero convexo es cíclico si y sólo si sus ángulos opuestos son suplementarios. O bien, un cuadrilátero convexo es cíclico si y sólo si desde un par de vértices adyacentes se ve el lado opuesto bajo ángulos iguales.

Teorema 21. (Teorema de Ptolomeo) Un cuadrilátero convexo es cíclico si y sólo si la suma de los productos de los lados opuestos es igual al producto de las diagonales.

Proposición 15. Dado un triángulo $\triangle ABC$ cualquiera, si H es su ortocentro, O su circuncentro y A' el punto medio del lado BC, entonces

$$AH = 2A'O.$$

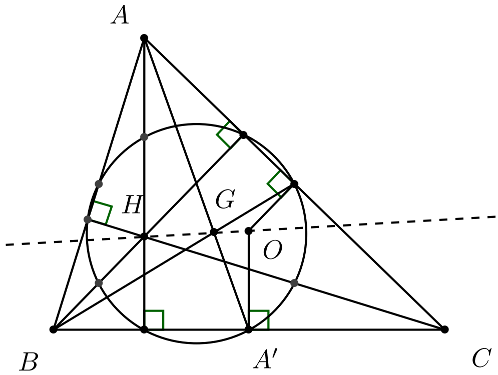
Teorema 22. El ortocentro, gravicentro y circuncentro de un triángulo son colineales. La distancia del ortocentro al gravicentro mide el doble que la distancia del gravicentro al circuncentro.

Definición 19. La recta que pasa por el ortocentro, gravicentro y circuncentro de un triángulo se llama la **recta de Euler** del triángulo en cuestión.

Corolario 23. El circuncentro del triángulo medial de un triángulo $\triangle ABC$ se encuentra en el punto medio del segmento HO de la recta de Euler de $\triangle ABC$.

Teorema 24. Los pies de las tres alturas de un triángulo, los puntos medios de los tres lados y los puntos medios de los segmentos que van de los vértices al ortocentro están en una circunferencia cuyo centro está en el punto medio del segmento HO de la recta de Euler.

Esta circunferencia se llama la **Circunferencia de los Nueve Puntos** de un triángulo. El centro de esta circunferencia se encuentra en la recta de Euler, a la mitad entre el ortocentro y el circuncentro.



7.1.7. Potencia

Proposición 16. Sean A, B, C y D cuatro puntos concíclicos. Si P es el punto de intersección de las rectas AB y CD, entonces

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

Definición 20. Dado un punto P cualquiera y una recta que pase por el punto y corte a una circunferencia en los puntos X y Y, la **potencia** del punto P con respecto a la circunferencia dada es igual a $PX \cdot PY$.

Teorema 25. Dados un punto P y una circunferencia de centro O y radio R, una secante desde el punto P que corta a la circunferencia en puntos A y B es tal que $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ es constante e igual a

$$\overline{PO}^2 - R^2.$$

Más aún, si P es un punto exterior de la circunferencia, entonces

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PT}^2,$$

en donde PT es una de las tangentes al círculo, que pasa por P.

Teorema 26. Si los lados opuestos AB y CD de un cuadrilétero se intersecan en un punto P y se cumple que $PA \cdot PB = PC \cdot PD$, entonces el cuadrilátero es cíclico.

Definición 21. El **eje radical** de dos circunferencias es el lugar geométrico de los puntos tales que tienen la misma potencia respecto a las circunferencias dadas.

Teorema 27. Los ejes radicales de tres circunferencias con centros no colineales tomados por pares son concurrentes.

Definición 22. El punto de intersección de los tres ejes radicales se llama **centro radical** de las tres circunferencias.

7.2. Teoría de números

7.2.1. Divisibilidad

Definición 23. Si a y b son enteros, decimos que a **divide a** b (en símbolos, $a \mid b$) si es posible encontrar un entero x de tal manera que $ax = b$.

Recordemos que si x es un número real cualquiera, entonces el **valor absoluto** de x, denotado por $|x|$, es su distancia al 0 en la recta numérica real.

Propiedades

1. Para a y b enteros, $a \Bigm| b$ si y sólo si $|a| \Bigm| |b|$.
2. Si $a \Bigm| b$ y $b \neq 0$, entonces $|a| \leq |b|$.
3. Para todo entero a se tiene que $a \Bigm| a$.
4. Si a, b y c son enteros tales que $a \Bigm| b$ y $b \Bigm| c$, entonces $a \Bigm| c$.
5. Es posible que $a \Bigm| b$ pero que $b \nmid a$.
6. Para a y b enteros, $a \Bigm| b$ y $b \Bigm| a$ si y solo si $|a| = |b|$.

Proposición 17. Para a, b y c enteros, $a \Bigm| b$ y $a \Bigm| c$ si y solo si $a \Bigm| rb + sc$ para cualesquiera r y s enteros.

Corolario 28. Si a, b, c son enteros tales que $a \mid b$ y $a \mid c$, entonces $a \mid (b + c)$.

Definición 24. Si b y c son enteros, todo número que pueda expresarse en la forma $rb + sc$ con r y s enteros se llama **combinación lineal** de b y c.

Corolario 29. Si b, c y d están relacionados por la ecuación $b + c = d$ y un número a es divisor de cualesquiera dos de ellos, entonces también lo es del tercero.

Números primos

Definición 25. Decimos que un entero $p \neq \pm 1$ es **primo** si sus únicos divisores son ± 1 y $\pm p$.

Un entero no cero y distinto de ± 1 es **compuesto** si no es primo. Los enteros 1 y -1 no son primos ni compuestos, se llaman **unidades** y al número 0 no se le considera dentro de ninguna de estas categorías.

Teorema 30. (Teorema Fundamental de la Aritmética, primera parte) Todo entero distinto de 0 y de ± 1 es producto de primos.

Observación. Al escribir un número entero como producto de primos se acostumbra poner primero el signo del número y después escribir solo primos positivos en orden creciente de magnitud, agrupando los primos que son iguales en la potencia correspondiente. Esta forma se llama la **descomposición canónica** del número. Por ejemplo, la descomposición canónica de -180 es $-2^2 3^2 5$.

Necesitamos saber cómo decidir si cierto número es primo o no; para esto, basta ver que si un número positivo a es producto de dos divisores positivos, entonces alguno de ellos debe ser menor o igual que $\sqrt{a}$ (pues el producto de dos números positivos mayores que $\sqrt{a}$ es mayor que a), de donde surge el siguiente lema:

Lema 1. Sea a un número entero mayor que 1 con la propiedad de que ningún número primo menor o igual que $\sqrt{a}$ lo divide. Entonces, a es primo.

Teorema 31. Hay una infinidad de números primos.

Teorema 32. (Postulado de Bertrand) Si $n > 3$ es un entero, entonces existirá al menos un número primo p con $n < p < 2n - 2$.

Como consecuencia de este resultado se cumple que entre cualquier entero mayor que 1 y su doble, por lo menos existe un número primo.

Se enunciarán ahora algunos criterios de divisibilidad por números pequeños:

- **Criterio de divisibilidad por 2.** Un entero a es divisible por 2 si y solo si a termina en 0, 2, 4, 6 y 8.
- **Criterio de divisibilidad por 3.** Un entero a es divisible por 3 si y solo si la suma de las cifras de a es divisible por 3. Por ejemplo, 474 es divisible por 3 pues $4 + 7 + 4 = 15$ y 15 es múltiplo de 3.
- **Criterio de divisibilidad por 4.** Un entero a es divisible por 4 si y solo si el número formado por las dos últimas cifras de a lo es. Por ejemplo, 7923 no es divisible por 4 ya que 23 no es múltiplo de 4.
- **Criterio de divisibilidad por 5.** Un entero a es divisible por 5 si y solo si termina en 0 ó 5.

- **Criterio de divisibilidad por 6.** Un entero a es divisible por 6 si y solo si a es divisible por 2 y por 3.
- **Criterio de divisibilidad por 8.** Un entero a es divisible por 8 si y solo si el número formado por las últimas tres cifras de a lo es. Por ejemplo, $27\,256$ es divisible por 8 pues 256 lo es.
- **Criterio de divisibilidad por 9.** Un entero a es divisible por 9 si y solo si la suma de las cifras de a es divisible por 9. Por ejemplo, $376\,831$ no es múltiplo de 9 pues $3+7+6+8+3+1=28$, que no es múltiplo de 9.
- **Criterio de divisibilidad por 10.** Un entero a es divisible por 10 si y solo si a termina en 0.
- **Criterio de divisibilidad por 11.** Un entero a es divisible por 11 si y solo si la diferencia de la suma de las cifras en posición impar de a menos la suma de las cifras en posición par de a es divisible por 11. Por ejemplo, $78\,425\,397\,248$ sí es divisible por 11 pues $(8+2+3+7+4)-(7+4+5+9+2+8)=24-35=-11$, que es divisible por 11.
- **Criterio de divisibilidad por 12.** Un entero a es divisible por 12 si y sólo si a es divisible por 4 y por 3.

Existen diversos criterios de divisibilidad por 7, pero ninguno de ellos es realmente práctico como los que se mencionan arriba.

7.2.2. Factorización en números primos

Teorema 33. (Teorema Fundamental de la Aritmética, segunda parte) Todo entero distinto de 0 y de ± 1 es producto de primos en forma única salvo orden y signo.

Gracias al Teorema Fundamental de la Aritmética, cada número entero distinto de 0 y ± 1 tiene una sola descomposición canónica. Agregando potencias de cero a las descomposiciones canónicas de dos o más números se pueden usar los mismos primos en las factorizaciones de todos ellos. Por ejemplo, si $a=675=3^3\times 5^2$ y $b=20=2^2\times 5$, entonces podemos escribir $a=2^0\times 3^3\times 5^2$ y $b=2^2\times 3^0\times 5$. Con esta escritura es muy fácil determinar si un número es divisible por otro o no como nos dice el siguiente corolario.

Corolario 34. Sean $a=\pm p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_k^{e_k}$ y $b=\pm p_1^{f_1}p_2^{f_2}\cdots p_k^{f_k}$, considerando que $p_1<p_2<\cdots<p_k$ son primos positivos y las e_i y f_j son enteros no negativos. Entonces, $a|b$ si y sólo si para toda $i=1,2,\ldots,k$, se tiene que $e_i\leq f_i$.

Corolario 35. Si $a=\pm p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_k^{e_k}$ es la descomposición canónica del entero a, entonces

1. El número de divisores positivos de a es

$$\tau(a)=(e_1+1)(e_2+1)\cdots(e_k+1).$$

2. La suma de los divisores positivos de a está dada por

$$(p_1^0 + p_1^1 + \cdots + p_1^{e_1})(p_2^0 + p_2^1 + \cdots + p_2^{e_2}) \cdots (p_k^0 + p_k^1 + \cdots + p_k^{e_k}).$$

3. El producto de los divisores positivos de a es igual a

$$a^s \text{ con } s = \frac{\tau(a) - 1}{2}.$$

Lema 2. (Lema de Euclides) Si p es un número primo que divide al producto de dos enteros positivos a y b, es decir, $p\big|ab$, entonces $p\big|a$ o bien $p\big|b$.

7.2.3. Algoritmo de Euclides.

Teorema 36. (Algoritmo de la División) Dados dos enteros a y b con $b \neq 0$, existen enteros únicos q y r de tal forma que

$$a = bq + r, \text{ con } 0 \leq r < |b|\,.$$

El número q en la proposición anterior es el **cociente** (de la división de a entre b) y el número r es el **residuo** (de la división de a entre b).

Observación. Si a y b son enteros y $b \neq 0$, entonces $b \mid a$ si y solo si el residuo r de la división de a entre b es 0.

Definición 26. Dados dos enteros m y n diferentes de cero, es claro que 1 divide a ambos números y que además existe un número finito de divisores comunes. Definimos su **máximo común divisor** en símbolos:

$$\mathrm{mcd}(m, n)$$

como el mayor de los divisores comunes a ellos, es decir,

$$d = \mathrm{mcd}(m, n),$$

si

1. $d|m$ y $d|n$

2. Para cualquier c tal que $c|m$ y $c|n$ se tiene que $c \leq d$.

Se estudiarán a continuación algunas propiedades del máximo común divisor de dos números; la generalización es sencilla usando la fórmula recursiva

$$\mathrm{mcd}(a_1, a_2, \ldots, a_k) = \mathrm{mcd}(a_1, \mathrm{mcd}(a_2, \ldots, a_k)).$$

Propiedades

Sean m y n enteros no cero. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\operatorname{mcd}(m,n) = \operatorname{mcd}(|m|,|n|)$;
2. $\operatorname{mcd}(m,n) > 0$;
3. si $m \mid n$, entonces $\operatorname{mcd}(m,n) = |m|$;
4. si $d = \operatorname{mcd}(m,n)$, $m = dm'$ y $n = dn'$ (es decir, m' y n' son los respectivos cocientes de m y n entre d), entonces $\operatorname{mcd}(m',n') = 1$.
5. Sea p un número primo. Si p no divide a n entonces $\operatorname{mcd}(p,n) = 1$.
6. Para cualquier número natural k se tiene $\operatorname{mcd}(km,kn) = k\operatorname{mcd}(m,n)$.
7. Si m y n se factorizan en primos de la siguiente manera
$$m = \pm p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k} \quad \text{y} \quad n = \pm p_1^{\beta_1}\cdots p_k^{\beta_k},$$
entonces $\operatorname{mcd}(m,n) = p_1^{\text{mín}(\alpha_1,\beta_1)}\cdots p_k^{\text{mín}(\alpha_k,\beta_k)}$.

Definición 27. Si $\operatorname{mcd}(a,b) = 1$, decimos que a y b son **primos relativos**, **primos entre sí** o **coprimos**.

Observación. Notemos que dos números pueden ser primos relativos aunque ninguno de ellos sea número primo; por ejemplo 4 y 9 son primos relativos ya que $\operatorname{mcd}(4,9) = 1$, sin embargo ninguno de los dos son números primos.

Lema 3. Sean a y b enteros no cero con $b \nmid a$. Si q y r son enteros tales que $a = bq + r$, entonces $\operatorname{mcd}(a,b) = \operatorname{mcd}(b,r)$.

Teorema 37. (Algoritmo de Euclides) Sean a y b enteros no cero, entonces $\operatorname{mcd}(a,b)$ es combinación lineal de a y b.

Corolario 38. Sean a y b dos enteros no cero y sea d su máximo común divisor, entonces cualquier divisor común de a y de b también lo es de d.

El siguiente corolario nos dice cuales números pueden ser combinación lineal de dos enteros a y b diferentes de cero.

Corolario 39. Sean a y b enteros no cero y sea d su máximo común divisor. Un número c es combinación lineal de a y b si y solo si es múltiplo de d, es decir, d es la mínima combinación lineal positiva de a y b.

Corolario 40. Todo entero a puede expresarse como combinación lineal de dos números primos p y q.

7.2.4. Mínimo común múltiplo

Definición 28. Sean m y n dos números naturales. Consideremos ahora todos los múltiplos positivos de m: $m, 2m, 3m, \ldots$ y los múltiplos positivos de n: $n, 2n, 3n, \ldots$. Notemos que mn es múltiplo tanto de m como de n. Al múltiplo común positivo más pequeño le llamamos el **mínimo común múltiplo** de m y n, y lo denotamos por $\operatorname{mcm}(m, n)$.

Algunas propiedades del mínimo común múltiplo son:

1. $\operatorname{mcd}(m, n) \cdot \operatorname{mcm}(m, n) = mn$.
2. Si c es un número natural tal que $m|c$ y $n|c$, entonces $\operatorname{mcm}(m, n)|c$, en particular $\operatorname{mcm}(m, n) \leq c$.
3. Si $m|n$, entonces $\operatorname{mcm}(m, n) = n$.
4. Si $k = \operatorname{mcm}(m, n)$, $k = m'm$ y $k = n'n$, entonces $\operatorname{mcd}(m', n') = 1$.
5. Sea p un número primo. Si p no divide a n, entonces $\operatorname{mcm}(p, n) = pn$.
6. Para cualquier número natural k se tiene $\operatorname{mcm}(km, kn) = k \operatorname{mcm}(m, n)$.
7. Si m y n se factorizan en primos como $m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ y $n = p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k}$, entonces $\operatorname{mcd}(m, n) = p_1^{\text{máx}(\alpha_1, \beta_1)} \cdots p_k^{\text{máx}(\alpha_k, \beta_k)}$.

7.2.5. Congruencias

Definición 29. Dados dos enteros a y b, diremos que son **congruentes módulo** m si $m|(a - b)$ y se escribe $a \equiv b \pmod{m}$. Esto es equivalente a afirmar que a y b dejan el mismo residuo cuando se les divide por m.

Algunas propiedades de las congruencias son:

1. Si $a \equiv b \pmod{m}$ y $c \equiv d \pmod{m}$, entonces $a + c \equiv b + d \pmod{m}$.
2. Si $a \equiv b \pmod{m}$ y $c \equiv d \pmod{m}$, entonces $ac \equiv bd \pmod{m}$. En particular, si $a \equiv b \pmod{m}$, entonces para cualquier natural k, $a^k \equiv b^k \pmod{m}$.
3. $m|a$ si y solo si $a \equiv 0 \pmod{m}$.
4. Si a y m son primos relativos y $a \equiv b \pmod{m}$, entonces b y m también son primos relativos.
5. Si k y m son primos relativos, entonces existe un entero h tal que $kh \equiv 1 \pmod{m}$.

Ahora vamos a fijar un número m. La relación en los enteros de ser congruentes módulo m es una relación de equivalencia, esto es, se cumple:

- Reflexividad: $a \equiv a \pmod{m}$ para todo número entero a.

- Simetría: Si $a \equiv b \pmod{m}$, entonces
$$b \equiv a \pmod{m}.$$
- Transitividad: Si $a \equiv b \pmod{m}$ y $b \equiv c \pmod{m}$, entonces
$$a \equiv c \pmod{m}.$$

Supongamos que m es un natural diferente de cero. Entonces, por ser la congruencia módulo m una relación de equivalencia, podemos clasificar a todos los enteros de la siguiente forma: los que son congruentes con 0, con 1, ..., con $m-1$. Cualquier entero cae en uno y solo uno de estos conjuntos.

En relación a las congruencias, tenemos algunos resultados.

Teorema 41. (Teorema Chino del Residuo) Sean $n_1, \ldots, n_k$ números enteros coprimos dos a dos. Entonces, dados $a_1, \ldots, a_k$ enteros, existe un entero x que resuelve el sistema de congruencias

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \pmod{n_1} \\ &\vdots \\ x &\equiv a_k \pmod{n_k}. \end{aligned}$$

Más aún, todas las soluciones x de este sistema son congruentes módulo el producto $n_1 \cdots n_k$.

Teorema 42. (Pequeño Teorema de Fermat) Sea p un número primo, entonces para cualquier número entero a,

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

Si a no es divisible por p, entonces se tiene además que

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Para enunciar una generalización del Pequeño Teorema de Fermat, necesitamos la siguiente definición.

Definición 30. Sea n un número natural. $\phi(n)$ denota el número de enteros entre 1 y n que son primos relativos con n. A la función $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ se le llama la **función ϕ de Euler**.

En particular, si p es un número primo, se tiene que $\phi(p) = p - 1$.

Teorema 43. (Teorema de Euler) Sea n cualquier número entero. Si a y n son primos relativos, entonces

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Teorema 44. (Teorema de Wilson) Si p es un número primo, entonces

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

Teorema 45. (Teorema de la Congruencia Lineal) Sean a y b dos números enteros y n un número natural. Entonces la congruencia

$$ax \equiv b \pmod{n}$$

tiene una solución para x si y solo si b es divisible por $\operatorname{mcd}(a, n)$. En este caso, si x_0 es una solución, el conjunto de todas las soluciones está dado por

$$\left\{ x_0 + k\frac{n}{\operatorname{mcd}(a, n)} : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

7.3. Combinatoria

7.3.1. Conteo

Proposición 18. Cada conjunto con n elementos tiene 2^n subconjuntos.

Definición 31. Dado $n \in \mathbb{N}$ denotaremos por $n!$ al producto de todos los números naturales menores o iguales que n; esto es:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1.$$

Para poder incluir el caso $n = 0$, se define

$$0! = 1.$$

Principio 1. (Principio Fundamental de Conteo) Si existen m formas de realizar una tarea y n formas de realizar otra tarea distinta, el total de formas de realizar ambas es $m \cdot n$.

Definición 32. Sea un conjunto E que consiste de n elementos y sea k un entero entre 0 y n.

- Una **permutación** de orden k (de los elementos de E) es una selección ordenada, sin repeticiones, de k elementos de E.
- Una **combinación** de orden k (de los elementos de E) es un subconjunto de E con k elementos.

Teorema 46. El número de combinaciones de n objetos diferentes tomados de k en k, con $k \leq n$ es

$$\binom{n}{k} = C_k^n = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

Teorema 47. Para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$C_0^n = 1 = C_n^n.$$

Teorema 48. Para todo n y todo $k < n$, se tiene que

$$C_k^n + C_{k+1}^n = C_{k+1}^{n+1}.$$

Principio 2. (Principio de Inclusión y Exclusión) Si tenemos n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (posiblemente con elementos en común), entonces el número total k de elementos que tienen entre todos es igual a $k_1 - k_2 + k_3 - k_4 + \cdots \pm k_n$, donde k_1 es la suma de los elementos que pertenecen a (por lo menos) uno de los conjuntos, k_2 es la suma de los elementos que pertenecen a (por lo menos) dos de los conjuntos, y, así, sucesivamente hasta k_n, que es el número de elementos en común a todos los conjuntos.

Proposición 19. Dados dos números naturales r y N, el número de r-adas $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ de enteros $a_1, a_2, \ldots, a_r$ que satisfacen $a_1 + a_2 + \cdots + a_r = N$ sujetos a restricción: $a_1 \geq k_1, a_2 \geq k_2, \ldots, a_r \geq k_r$, donde $k_1, k_2, \ldots, k_r$ son enteros dados, es

$$\binom{N - (k_1 + k_2 + \cdots + k_r) + r - 1}{r - 1}.$$

Permutaciones

Teorema 49. El total de formas en que se pueden permutar n objetos tomados de n en n es

$$P_n^n = n!$$

Teorema 50. El número de permutaciones de n objetos en k lugares está dado por

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

para $k \leq n$.

Definición 33. Llamamos **permutaciones cíclicas** al número de formas diferentes de acomodar n objetos en círculo y lo denotamos por PC_n.

Cuando se acomodan n objetos en k lugares con la opción de repetir los objetos, tenemos **permutaciones con repetición**, las cuales se denotan $\overline{P_k^n}$.

7.3.2. Principio de Casillas

Principio 3. (Principio de Casillas, primera versión) Si $n + 1$ objetos se deben acomodar en n casillas, entonces en alguna casilla quedarán al menos dos objetos.

Principio 4. (Principio de Casillas, segunda versión) Si $nk + 1$ objetos se deben acomodar en n casillas, entonces en alguna casilla quedarán más de k objetos.

Principio 5. (Principio de Casillas, tercera versión)

- Si m objetos se deben acomodar en n casillas, entonces en alguna casilla deberán quedar al menos $\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$ objetos.

Aquí $\lceil x \rceil$ es igual al menor entero que es mayor o igual a x, y $\lfloor x \rfloor$ es igual al mayor entero menor o igual a x. Notemos que si $m = nk + 1$, se tiene que

$$\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil = \left\lceil \frac{nk+1}{n} \right\rceil = \left\lceil k + \frac{1}{n} \right\rceil = k + 1$$

y entonces, la tercera versión del principio generaliza a la segunda versión.

Principio 6. (Principio de Casillas, versión con promedios)

- Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números positivos y a es el promedio de ellos, entonces hay un a_i con $a_i \leq a$.
- Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números positivos y a es el promedio de ellos, entonces hay un a_j con $a_j \geq a$.

En efecto, si para todo número a_i se cumple que $a_i > a$, entonces el promedio de los a_i es mayor que a. Notemos que no se señaló a cuál promedio nos referimos de entre los siguientes:

Promedio Aritmético: $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$

Promedio Geométrico: $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}$

Promedio Armónico: $\dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$

ya que los tres funcionan en esta versión.

Principio 7. (Principio de Casillas, versión con sumas)

- Si $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ y $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ son dos colecciones de números que cumplen con $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq b_1 + b_2 + \cdots + b_n$, entonces hay un índice i tal que $a_i \geq b_i$.
- Si $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ y $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ son dos colecciones de números que cumplen con $a_1 + a_2 + \cdots + a_n < b_1 + b_2 + \cdots + b_n$, entonces hay un índice i tal que $a_i < b_i$.

Principio 8. (Principio de Casillas, versión fuerte) Consideremos k_1, k_2, $\ldots$, k_n enteros positivos. Si $k_1 + k_2 + \cdots + k_n + 1$ objetos se deben acomodar en n casillas, entonces existe un i tal que en la casilla i deberán quedar al menos $k_i + 1$ objetos.

En términos de colores, esta versión fuerte del Principio de Casillas asegura que: “Si hay $k_1 + k_2 + \cdots + k_n + 1$ objetos que se deben colorear con uno de los n colores entonces hay un color i que se usa para colorear al menos $k_i + 1$ objetos”.

7.3.3. Gráficas

Definición 34. Una **gráfica** es una colección de puntos unidos por líneas. Los puntos se llaman **vértices** y las líneas que los unen se llaman **aristas**.

Definición 35. Dados dos vértices u y v, un **camino** de u a v es una sucesión alternada de vértices y aristas $v_0, a_0, v_1, a_1, \ldots, v_n, a_n$, donde $v_0 = u$, $v_n = v$, $a_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ para cada $i = 1, \ldots, n$. El número de aristas del camino se llamará la **longitud del camino**.

Diremos que el camino es una **trayectoria** si los vértices no se repiten.

Diremos que el camino es un **paseo** si las aristas no se repiten.

Definición 36. Una gráfica de n vértices en donde cada pareja de vértices está unida por una arista se conoce como una **gráfica completa** de n vértices y se denota por K_n. Notemos que K_n tiene $\binom{n}{2}$ aristas.

Definición 37. Una gráfica es **conexa** si cualesquiera dos vértices se conectan por un camino.

7.4. Álgebra

7.4.1. Factorización

Teorema 51. (Productos Notables) Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$, entonces

- $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$,
- $x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$,
- $x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$,
- $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2xz = (x+y+z)^2$,
- $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2) = (x-y)^3 + 3xy(x-y)$,
- $x^3 - xy^2 + x^2y - y^3 = (x+y)(x^2-y^2)$,
- $x^3 + xy^2 - x^2y - y^3 = (x-y)(x^2+y^2)$.

El primer producto recibe el nombre de **producto de binomios conjugados** y el resultado de este, **diferencia de cuadrados**; de igual forma, los resultados del segundo y tercer productos reciben el nombre de **trinomio cuadrado perfecto**, y son de los más usados.

7.4.2. Polinomios

Definición 38. Un **polinomio** $P(x)$ en una variable es una expresión de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

donde $a_0, \ldots, a_n$ son constantes y $n \in \mathbb{N}$. A cada sumando lo llamaremos **monomio** o **término**. Las constantes a_i se conocen como los **coeficientes** del polinomio.

Si $a_n \neq 0$ decimos que el polinomio tiene grado n. El número a_0 es el **término constante**. Si $a_n = 1$, decimos que el polinomio es **mónico**. Denotamos por $grad(P)$ al grado de $P(x)$.

Definición 39. Un cero de un polinomio $P(x)$ es un número r tal que $P(r) = 0$. Cuando $P(r) = 0$ también decimos que r es una **raíz** o una **solución** de la ecuación $P(x) = 0$.

Definición 40. Consideremos dos polinomios cualesquiera con $n \geq m$,

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \\ Q(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m. \end{aligned}$$

Definimos la **suma de dos polinomios** como:

$$(P+Q)(x) = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_m+b_m)x^m+a_{m+1}x^{m+1}+\cdots+a_nx^n,$$

y la **resta de dos polinomios** como:

$$(P-Q)(x) = (a_0-b_0)+(a_1-b_1)x+\cdots+(a_m-b_m)x^m+a_{m+1}x^{m+1}+\cdots+a_nx^n.$$

El **producto** de $P(x)$ por una constante c es:

$$cP(x) = ca_0 + ca_1x + ca_2x^2 + \cdots + ca_nx^n.$$

El **producto de dos polinomios** se denota por:

$$\begin{aligned} (PQ)(x) &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \\ \cdots &\quad +(a_0b_r + a_1b_{r-1} + \cdots + a_rb_0)x^r + \cdots + a_nb_mx^{n+m}. \end{aligned}$$

Teorema 52. (Algoritmo de la División) Dados dos polinomios P y Q existen polinomios únicos H y R tales que

$$P(x) = Q(x)H(x) + R(x)$$

con $grad(R) < grad(Q)$ o $R(x) = 0$. Los polinomios $H(x)$ y $R(x)$ se llaman **cociente** y **residuo**, respectivamente. Si $R(x) = 0$, decimos que Q **divide** a P.

Teorema 53. (Teorema del Factor) El número a es raíz de un polinomio $P(x)$ si y sólo si el polinomio $P(x)$ es divisible por $x - a$.

Definición 41. Sea $P(x)$ un polinomio. Si existe una $m \in \mathbb{N}$ y un polinomio $Q(x)$ tal que

$$P(x) = (x-a)^mQ(x)$$

con $Q(a) \neq 0$, decimos que a es una raíz o un cero de **multiplicidad** m.

Teorema 54. (Fórmulas de Vieta) Si un polinomio mónico $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ tiene n raíces $x_1, x_2, \ldots, x_n$, entonces

$$\begin{aligned}
a_{n-1} &= -(x_1 + \cdots + x_n), \\
a_{n-2} &= x_1x_2 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n, \\
&\vdots \\
a_{n-j} &= (-1)^j \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq n} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_j}, \\
&\vdots \\
a_0 &= (-1)^n x_1x_2\cdots x_n.
\end{aligned}$$

7.4.3. Teorema del Binomio de Newton

El **Triángulo de Pascal** está formado por número enteros y se construye de la siguiente manera, en donde los elementos de enmedio son la suma de los valores de los dos elementos encima de él.

n = 0:							1							
n = 1:						1		1						
n = 2:					1		2		1					
n = 3:				1		3		3		1				
n = 4:			1		4		6		4		1			
n = 5:		1		5		10		10		5		1		
n = 6:	1		6		15		20		15		6		1	

Empezando por el renglón cero, los valores que aparecen en el renglón n representan los coeficientes del polinomio que resulta de elevar el binomio $x + y$ a la n-ésima potencia. Por ejemplo, para $n = 5$ tenemos

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5.$$

Cuando en lugar de suma se tiene una sustracción, entonces los signos de los coeficientes se van alternando de positivo a negativo. Por ejemplo, para $n = 5$ tenemos

$$(x-y)^5 = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5.$$

También podemos ver el Triángulo de Pascal de la siguiente forma:

$$
\begin{array}{ll}
\text{n = 0:} & \binom{0}{0} \\
\text{n = 1:} & \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
\text{n = 2:} & \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\text{n = 3:} & \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\text{n = 4:} & \binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
\text{n = 5:} & \binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5} \\
\text{n = 6:} & \binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6}
\end{array}
$$

en donde, de la misma manera, el renglón n-ésimo corresponde a los coeficientes del desarrollo del binomio $(x+y)^n$ y cada uno de estos coeficientes se llama coeficiente binomial.

En general, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, el desarrollo de $(x+y)^n$ lo obtenemos de la siguiente fórmula llamada **Binomio de Newton**.

Teorema 55. (Teorema del Binomio de Newton) Sean x e y dos números y sea n en $\mathbb{N}$, entonces

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i.$$

Teorema 56. Sea n en $\mathbb{N}$, entonces

$$2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}.$$

7.4.4. Desigualdades

Teorema 57. (Desigualdad del Triángulo) En todo triángulo la suma de las longitudes de dos lados cualquiera es siempre mayor o igual a la longitud del lado restante.

De esta forma, si A, B y C son tres puntos en el plano, entonces

$$AB + BC \geq AC.$$

Además, la desigualdad se alcanza si y sólo si B está en el segmento AC.

Definición 42. Dados n números no negativos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, los números

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \quad \text{y} \quad \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

son la ***media aritmética*** y la ***media geométrica*** de los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$, respectivamente.

Teorema 58. (Desigualdad Media Geométrica-Media Aritmética) Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son n números no negativos, entonces

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Teorema 59. (Desigualdad Útil) Si a, b, x, y son números reales y además x, y son positivos, entonces

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}.$$

Teorema 60. (Desigualdad de Nesbitt) Para $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, se cumple

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Bibliografía

ALBERRO SEMERENA, A., R. Bulajich Manfrino y C. J. Rubio Barrios. *Problemas avanzados. Cuadernos de olimpiadas de matemáticas.* Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2010.

ANDREESCU, T. and R. Gelca. *Mathematical Olympiad Challenges.* 2nd. ed., Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2009.

ANDREESCU, T. and K. Kedlaya. *Mathematical Olympiads 1997-1998, Problems and Solutions from Around the World.* American Mathematics Competitions, USA, 1999.

AREF, M. N. and W. Wernick. *Problems and Solutions in Euclidean Geometry.* Dover Publications Inc., Mineola, New York, 2010.

BULAJICH MANFRINO, R. y J. A. Gómez Ortega. *Geometría. Cuadernos de olimpiadas de matemáticas.* Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2002.

——. *Geometría. Ejercicios y problemas. Cuadernos de olimpiadas de matemáticas.* Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2002.

BULAJICH MANFRINO, R., J. A. Gómez Ortega y R. Valdez Delgado. *Desigualdades. Cuadernos de olimpiadas de matemáticas.* 4a. ed., Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2010.

BULAJICH MANFRINO, R. y C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, avanzado. Cuadernos de olimpiadas de matemáticas.* Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2012.

COXETER, H. S. M. and S. L. Greitzer. *Geometry Revisited.* The Mathematical Association of America, Washington, D. C., 1967.

COXETER, H. S. M. *Introduction to Geometry.* 2nd. ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, Chichester, Brisbane, Toronto, 1969.

GÓMEZ ORTEGA, J. A., R. Valdez Delgado y R. Vázquez Padilla. *Principio* *de las casillas. Cuadernos de olimpiadas de matemáticas.* 4a. ed., Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2011.

ILLANES, A. *Principios de olimpiada. Cuadernos de olimpiadas de matemáticas.* Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2001.

JOYCE, D. E. *Euclid's Elements.* Department of Mathematics and Computer Science, Clark University, Worcester, 1998.
URL http://www2.clarku.edu/~djoyce/elements/elements.html. (Consultado: 9 de octubre de 2017)

LI, K. Y. "Angle Bisectors Bisect Arcs", *Mathematical Excalibur.* 11(2), p. 1, Kowloon, Hong Kong, 2006.

——. "Pigeonhole Principle", *Mathematical Excalibur.* 1(1), pp. 1-2, Kowloon, Hong Kong, 1995.

NIVEN, I. y H. Zukerman. *Introducción a la teoría de los números.* Limusa-Wiley, México, 1972.

PÉREZ SEGUÍ, M. L. *Combinatoria. Cuadernos de olimpiadas de matemáticas.* 3ra. ed., Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2005.

——. *Combinatoria avanzada. Cuadernos de olimpiadas de matemáticas.* 3ra. ed., Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2010.

——. *Matemáticas preolímpicas. Cuadernos de olimpiadas de matemáticas.* Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2008.

——. *Teoría de números. Cuadernos de olimpiadas de matemáticas.* Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2009.

POGORÉLOV, A. V. *Geometría elemental.* Instituto Politécnico Nacional, México, 1998.

RUBIO BARRIOS, C. J. (ed.) *Problemas para la 21a. Olimpiada Mexicana de Matemáticas (Problemas avanzados).* Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2007.

——. *Problemas para la 22a. Olimpiada Mexicana de Matemáticas (Problemas avanzados).* Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2008.

RUBIO BARRIOS, C. J. y G. Ruiz Sánchez (eds.) *Problemas para la 19a. Olimpiada Mexicana de Matemáticas (Problemas avanzados).* Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2005.

SHIVELY, L. S. *Introducción a la geometría moderna.* Compañía Editorial Continental, México, 1963.

SOBERÓN BRAVO, P. *Combinatoria para olimpiadas. Cuadernos de olimpiadas de matemáticas.* Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2010.

VILENKIN, N. *¿De cuántas formas? Combinatoria.* Editorial Mir, Moscú, 1972.

WENTWORTH, J. y D. E. Smith. *Geometría plana y del espacio.* Editorial Porrúa, México, 2000.

Índice alfabético

Esta obra es fruto del esfuerzo del Comité Estatal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Veracruz, integrado por académicos y alumnos de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Veracruzana, durante el año 2014. Concebido como una herramienta esencial tanto para estudiantes con interés en las competencias matemáticas, como para sus mentores, este libro propone un itinerario formativo a través de una selección de ejercicios. Estos desafíos, que varían en grado de dificultad, han sido extraídos de diversas competencias realizadas en Veracruz, incluyendo los exámenes de selección empleados para constituir la Delegación Veracruzana de 2014. Adicionalmente, se incluyen ejercicios de entrenamiento y el examen correspondiente al concurso nacional de la 28ª edición de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas.

Cada uno de los ejercicios presentados se acompaña de soluciones detalladas y, en ocasiones, de distintos enfoques metodológicos para su resolución. Este libro no solo busca ser una guía de estudio, sino también una invitación a explorar y enriquecer las habilidades matemáticas, preparando al lector para enfrentar con éxito los retos de las olimpiadas de matemáticas. Sumérgete en esta aventura de aprendizaje y resolución de problemas, y disfruta de cada descubrimiento en el camino hacia la excelencia matemática.

Universidad Veracruzana
Dirección Editorial